

3.(Ch. 8)

(a)

若此 array 的 strength=2, 則 Minimum run size = $\text{lcm}(4,6,9) = 36$ 。

在 Table 8C.7 (Wu and Hamada, 2009) 的 $OA(36, 2^{11}3^{12})$ 中取 1 至 6 行為六個三水準的因子以及 13 至 19 行為七個兩水準的因子所形成的 OA 即為所求。此 OA 在第一行上只有兩次 level change, 適合安排給 hard-to-change 的因子使用。

(b)

一個 OME plan 要確保所有主效應都可以被估計, 所有主效應的個數為 $7*1+6*2=19$, 故至少需要 $19+1=20$ 個不同設定。由 Table 8E.1 可找到兩符合條件的 OME plan :

OME plan	Number of Runs	Run Size Savings
$3^{n_1}2^{n_2}(n_1+n_2=13, n_1 \geq 3)$	27	$36-27=9$
$4^{n_1}3^{n_2}2^{31-3(n_1+n_2)}, (n_1+n_2=1, \dots, 9)$	32	$36-32=4$

第一個 plan 節省較多 run。

2.(Ch.9)

(a)

令 X_1 為一包含所有因子主效應的矩陣, X_2 為一包含所有二階交互作用的矩陣。若將 A,B,C,D,E,F,G 投影到 Type V 的最後 7 個因子, 則 $X_1^T X_2$ 為零矩陣。因此主效應與二階交互作用無任何 fully aliased 與 partially aliased。

(b)

當投影到 Type II 時, $X_1^T X_2$ 亦為零矩陣。因此主效應與二階交互作用無任何 fully aliased 與 partially aliased。

(c)

若單從投影後的設計來看, Type V 與 Type II 在效應混淆上的表現是一樣的。若從整個 design (16×15) 來看, Type V 的 partially aliased 個數為 1344, 而 Type II 的 partially aliased 個數為 768。因此 Type V 相較於 Type II “more nonregular”。

4.(Ch.9)

(a)

資料整理後如下，其中 y 為要使用的 response：

	F	B	A	C	D	E	G	H	J	K	low	up	y
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	93.5	105.0	99.25
2	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	42.0	56.5	49.25
3	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+	128.0	128.0	128.00
4	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	56.5	71.0	63.75
5	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	56.5	71.0	63.75
6	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	0.0	42.0	21.00
7	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	56.5	71.0	63.75
8	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	42.0	56.5	49.25
9	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	82.0	93.5	87.75
10	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	82.0	93.5	87.75
11	+	+	-	+	-	-	-	-	+	+	82.0	93.5	87.75
12	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	42.0	56.5	49.25

Method I

Step 1 選出的模型如下：

$$M_A = (A, AD, AH, AJ, AK), R^2 = 0.708$$

$$M_B = (B, BC, BD, BE, BF, BG, BH, BK), R^2 = 0.930$$

$$M_C = (C, AC, BC, CD, CE, CF, CG, CH, CJ, CK), R^2 = 0.997$$

$$M_D = (D, AD, BD, CD, DF, DH, DJ), R^2 = 0.969$$

$$M_E = (E, AE, BE, CE, DE, EF, EG, EH, EJ, EK), R^2 = 0.996$$

$$M_F = (F, BF, DF, FG), R^2 = 0.538$$

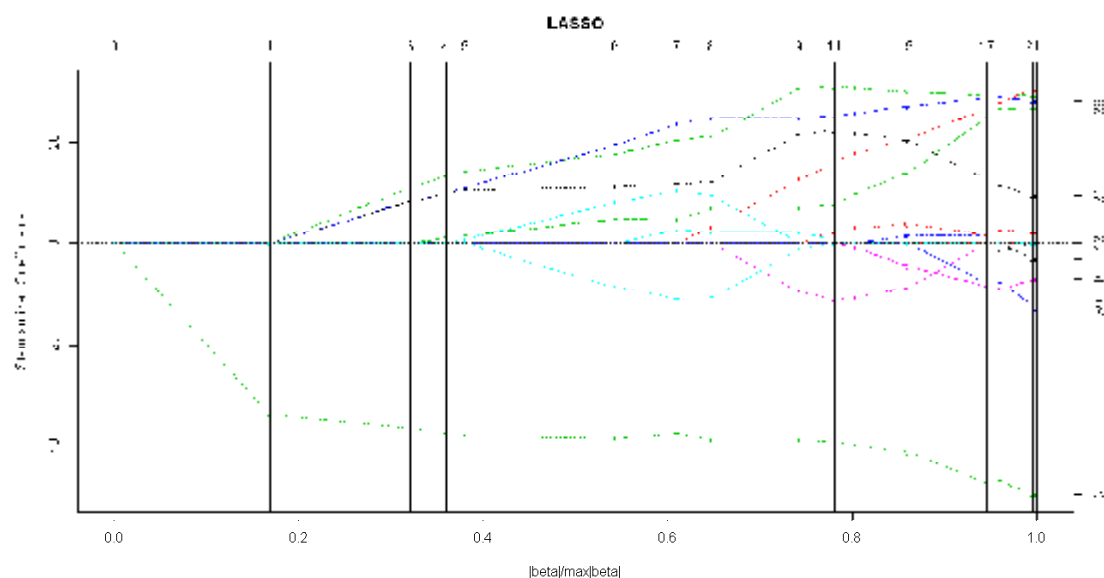
$$M_G = (G, AG, BG, EG, FG, GH, GJ, GK), R^2 = 0.893$$

$$M_H = (H, AH, BH, CH, DH, EH, FH, GH, HK), R^2 = 0.932$$

$$M_J = (J, AJ, CJ, DJ, FJ, GJ, JK), R^2 = 0.957$$

$$M_K = (K, AK, BK, CK, FK, GK, HK, JK), R^2 = 0.967$$

取這些效應的聯集來配適模型並執行 model selection, 效應個數 48 遠大過 run size, 故使用 LASSO 來執行 model selection：



較顯著的效應為 D,E,CD,CJ,CK,DH,EG, 再加入與 D,E 相關的所有 2fi's 來執行 model selection 得：

```

BIC
Best Model:
      Estimate Std. Error   t value   Pr(>|t|)
(Intercept)  70.875000 0.01668728  4247.2468 5.543512e-08
E             -31.082921 0.02572353 -1208.3460 6.848839e-07
C.K           5.930693 0.02318687   255.7780 1.528493e-05
D.H           -1.264356 0.02648399   -47.7404 4.384723e-04
D.A           8.269802 0.02817871   293.4769 1.161033e-05
D.G          -21.364356 0.02648399  -806.6894 1.536690e-06
D.J          -20.320545 0.03150476  -644.9992 2.403699e-06
E.B           19.054455 0.03150476   604.8120 2.733741e-06
E.C           11.896782 0.02569135   463.0656 4.663499e-06
E.K           -4.871782 0.02569135  -189.6273 2.780866e-05

```

將此 model 再加上所有的主效應後執行 model selection (LASSO)並重複上述步驟, 最後得 final fitted model 為

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
(Intercept)  70.87500    0.01669   4247.25 5.54e-08 ***
E            -31.08292    0.02572  -1208.35 6.85e-07 ***
C:K           5.93069    0.02319    255.78 1.53e-05 ***
D:H           -1.26436    0.02648    -47.74 0.000438 ***
D:A           8.26980    0.02818    293.48 1.16e-05 ***
D:G          -21.36436    0.02648   -806.69 1.54e-06 ***
D:J          -20.32054    0.03150   -645.00 2.40e-06 ***
E:B           19.05446    0.03150    604.81 2.73e-06 ***
E:C           11.89678    0.02569    463.07 4.66e-06 ***
E:K           -4.87178    0.02569   -189.63 2.78e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.05781 on 2 degrees of freedom
Multiple R-squared: 1, Adjusted R-squared: 1
F-statistic: 2.981e+05 on 9 and 2 DF, p-value: 3.354e-06

```

此 model $R^2=1$, 有 over-fitted。

Method II

將 h 設為小於等於 $12 \times 0.3 = 3.6$ 的最大整數 3, 並執行 model 中有 3 個效應的 model selection 且要滿足 effect heredity principle。最後選得：

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    70.875      3.520   20.135 3.86e-08 ***
B               -8.667      3.520   -2.462 0.039191 *
E              -25.219      3.734   -6.755 0.000144 ***
B:A            -11.156      3.734   -2.988 0.017385 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 12.19 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8673,    Adjusted R-squared:  0.8176
F-statistic: 17.43 on 3 and 8 DF,  p-value: 0.0007209

```

此 model 使用 3 個效應就解釋了 86.73% 的變異, 且滿足 effect heredity, effect hierarchy 的特性。由此 model 也可推估 effect sparsity 在這個實驗上應該是成立的。