4.44

Majority decoding: 五個字元中，出現最多次的字元爲解碼結果

$$P(\text{錯誤解碼}) = P(\text{錯誤字元 } {>}3)$$

(令 X 爲傳錯的字元數 則 X∼ Bin(5,0.2))

$ANS:$

$$P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$= \left(\binom{5}{3}(0.2)^3(0.8)^2 + \binom{5}{4}(0.2)^4(0.8) + \binom{5}{5}(0.2)^5\right)$$

$$= (10(0.008)(0.64) + 5(0.0016)(0.8) + 0.00032) = \mathbf{0.05792}$$

Assumption:All of the digit transmission in a message are independent.

4.53

(a)

$$\begin{cases} \text{令 X 爲 10 場中贏的場數，則 X\sim Bin(10,p)} \\ \text{令 Y 爲後 7 場贏的場數，則 Y\sim Bin(7,p)} \end{cases}$$

ANS:

$$P\left(\underbrace{\{W,W,L\}}_{\text{前三場 \textbf{win,win lose} 的事件}}\cap Y=5\,|X=7\right)=\frac{p^2(1-p)\times\binom{7}{5}p^5(1-p)^2}{\binom{10}{7}p^7(1-p)^3}=\frac{7}{40}$$

(b)

Similarly,

$$P\left(\underbrace{\{L,W,L\}}_{\text{前三場 \textbf{lose,win lose} 的事件}}\cap Y=6\;\;|\,X=7\right)=\frac{p(1-p)^2\times\binom{7}{6}p^6(1-p)}{\binom{10}{7}p^7(1-p)^3}=\frac{7}{120}$$

4.56

P(At least one conform)=1-P(no one conform)

(a)

令 X 爲 80000 對夫妻中都是 4/30 生日的夫妻對數，則 X∼Bin(80000,$(\frac{1}{365})^2$)

成功機率 $(\frac{1}{365})^2$ 是因爲兩人在 365 天中特定一天同時生日

因實驗次數夠多，且每次機率很低，可以使用 Poisson 分布逼近

$$X \rightarrow Poisson(\lambda = 80000 \cdot (\frac{1}{365})^2)$$

ANS:

$$P(At\ least\ one\ couple\ both\ born\ on\ 8/1) = 1 - P(no\ couple\ both\ born\ on\ 8/1)$$

$$= 1 - P(X = 0) = 1 - (\frac{e^{-80000/(365)^2}(\frac{80000}{(365)^2})^0}{0!})$$

$$\simeq 1 - e^{-0.6}$$

(b)

令 Y 爲 80000 對夫妻中有同天生日的夫妻對數，則 Y $\sim Bin(80000, \frac{1}{365})$

機率 $\frac{1}{365}$ 的來由是，選定一個人可在任一天生日，另一個人剛好在同一天的機率

次數夠多且發生機率低，Y 可以逼近 Poisson

$$Y \rightarrow Poisson(\lambda = 80000 \cdot \frac{1}{365})$$

ANS:

$$P(At\ least\ onecouple\ same\ birthday) = 1 - P(no\ couple\ same\ birthday)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\frac{80000}{365}}(\frac{80000}{365})^0}{0!} \simeq 1 - e^{-219.19}$$

4.67

(a)

已知每 1,000 位居民每年出生數大约有 6.94，該國總人口為 40,000，因此

$$\text{該國年出生数} = \frac{6.94}{1000} \times 40000 = 277.6$$

令 λ 為 3 個月內的出生數平均值，一年有 12 個月，因此

$$\lambda = \frac{277.6}{4} = 69.4$$

令 $X =$ the number of births in this country during a 3-month period，$X \sim \text{Poi}(\lambda = 69.4)$。

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$ANS = P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) = 1 - \sum_{k=0}^{60} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1 - 0.142 = 0.858$$

(b)

把一年分為 4 個三個月的季節，每個季節內出生數都是獨立的 $\text{Poi}(\lambda = 69.4)$。

令 $Y =$ the number of phases of 3 months that there will be more than 60 births。

$Y \sim \text{Bin}(n = 4, p = P(X > 60))$

$$P(Y = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}$$

$$ANS = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - \binom{4}{0} p^0 (1-p)^{4-0} - \binom{4}{1} p^1 (1-p)^{4-1} = 0.990$$

(c)

令 Z 為第一次出現出生數超過 60 的季節，則 $Z \sim \text{Geom}(p = P(X > 60) = 0.858)$

$$P(\text{第一次在第}i\text{ 季節出現}) = P(Z = i) = (1-p)^{i-1} \times p$$

ANS:

$$P(\text{第一次在第 1 季節出現}) = P(Z = 1) = (1-p)^{1-1} \times p = 0.858$$
$$P(\text{第一次在第 2 季節出現}) = P(Z = 2) = (1-p)^{2-1} \times p = 0.122$$
$$P(\text{第一次在第 3 季節出現}) = P(Z = 3) = (1-p)^{3-1} \times p = 0.017$$
$$P(\text{第一次在第 4 季節出現}) = P(Z = 4) = (1-p)^{4-1} \times p = 0.002$$

4.77

令 $X =$ the number of people who agree to be interviewed。

(a)

$X \sim \text{Bin}(n = 5, p = \frac{2}{3})$

5 人全部都同意 interview 的機率

$$ANS = P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 (1-p)^{5-5} = p^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.132$$

(b)

$X \sim \text{Bin}(n = 8, p = \frac{2}{3})$

8 人中至少有 5 人同意 interview 的機率

$$ANS = P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \sum_{k=5}^{8} \binom{8}{k} p^k (1-p)^{8-k} = 0.741$$

(c)

令 Y 為恰好 interview 5 人需 speak to 的人數。

(Note : Speak to 的第 Y 個人，恰好是同意 interview 的第 5 人)

令 $Z \sim \text{NegBin}(5, 2/3)$，則

$$\begin{aligned} P(Y = 5) &= P(Z = 5) \\ P(Y = 6) &= P(Z = 6) \\ P(Y = 7) &= P(Z = 7) \\ P(Y = 8) &= P(Z = 8) \end{aligned}$$

而無法成功 interview 5 人的機率則為 $P(Z \geq 9)$。

Speak to 的第 6 個人，恰好是同意 interview 的第 5 人的機率

$$ANS = P(Y = 6) = P(Z = 6) = \binom{5}{4} p^5 (1-p)^1 = 0.219$$

(d)

Speak to 的第 7 個人，恰好是同意 interview 的第 5 人的機率

$$ANS = P(Y = 7) = P(Z = 7) = \binom{6}{4} p^5 (1-p)^2 = 0.219$$

4.81

令 X 為停止時的次數，則 $X \sim \text{Geom}(p)$，其中 p 為在 6 個球中恰好抽到 2 個紅球的機率，故

$$p = P(2 \text{ red balls}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{4}}{\binom{12}{6}} = \frac{420}{924} = 0.455$$

其中

$\binom{4}{2}$ 表示從 4 個紅球中選擇 2 個紅球的组合数

$\binom{8}{4}$ 表示從 8 個綠球和藍球中選擇 4 個球的组合数

$\binom{12}{6}$ 表示從 12 個球中選擇 6 個球的组合数

每次抽取的結果是獨立的，計算恰好在第 n 次抽取後停止的機率

$$ANS = P(X = n) = (1-p)^{n-1} \times p = (1-0.455)^{n-1} \times 0.455$$

Theoretical Exercises

4.10

根據題目，令一個隨機變數$X \sim Bin(n,p)$。
因此，
ANS:

$$
\begin{aligned}
E[(1-p)^X] &= \sum_{x=0}^{n}(1-p)^x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^n \\
&= (1-p)^n\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x1^{n-x} \\
&= (1-p)^n(1+p)^n \\
&= (1-p^2)^n
\end{aligned}
$$

4.17

根據題目，令$X \sim Poi(\lambda)$。
當$\lambda \geq 1$時，先考慮$1 \leq i \leq [\lambda]$，其中$[\lambda]$爲整數且滿足 $\lambda - 1 < [\lambda] \leq \lambda$，這時

$$\frac{P(X=i)}{P(X=i-1)} = \frac{\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}}{\frac{\lambda^{i-1}e^{-\lambda}}{(i-1)!}} = \frac{\lambda}{i} \geq 1$$

這代表說 P(X=i) 對於 i 是單調遞增的，當$1 \leq i \leq [\lambda]$。
因此，當$\lambda \geq 1$時，對於所有 $0 \leq i \leq [\lambda]$ ，P(X=i) 都是單調遞增的對於 i 。
當$\lambda > 0$時，我們考慮 $[\lambda+1] \leq i$
顯然，

$$\frac{P(X=i)}{P(X=i-1)} = \frac{\lambda}{i} < 1$$

這代表說當$\lambda > 0$時， P(X=i) 對於 i 是單調遞減的，當$[\lambda] \leq i$。
因此，根據上述的結果可以知道 P(X=i) 在i爲不超過λ的整數，也就是$[\lambda]$時，有最大值 $P(X=[\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}e^{-\lambda}}{([\lambda])!}$。

4.20

根據題目，令$X \sim Poi(\lambda)$。
這時，

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^n \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x^n \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!} x^{n-1} \\ &= \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} (y+1)^{n-1} \\ &= \lambda E[(X+1)^{n-1}] \end{aligned}$$

根據上述推導的結果(代 n=3)以及$E(X) = \lambda$。
ANS:

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \lambda E[(X+1)^2] \\ &= \lambda E(X^2 + 2X + 1) \\ &= \lambda(E(X^2) + 2E(X) + 1) \\ &= \lambda(\lambda E(X+1) + \lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

4.21

Let S_k be the # of heads when tossing all n coins for the kth time.
Then , $S_k \sim Bin(n,p) \to Poi(\lambda = np), i.e, P(S_k = s) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}$

$$=> \ P(S_k = 0) \approx e^{-\lambda} \ , \ P(S_k = 1) \approx \lambda e^{-\lambda} \ , \ P(S_k \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}.$$

Let T be the # of times all n coins are tossed until the process stop.
Then $T \sim Geo(1 - e^{-\lambda})$, where $1 - e^{-\lambda}$ comes from $P(S_k \geq 1)$.
ANS:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \sum_{t=1}^{\infty} P(S_t = 1 | T = t) P(T = t) \\ &\approx \sum_{t=1}^{\infty} (\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}) \times (e^{-\lambda})^{t-1}(1 - e^{-\lambda}) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

where $P(S_t = 1 | T = t) = \frac{P(S_1=0,\ldots,S_{t-1}=0,S_t=1)}{P(S_1=0,\ldots,S_{t-1}=0,S_t\geq 1)} = \frac{P(S_t=1)}{P(S_t\geq 1)} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$. Hence,(b) case is correct.