機率論 HW4

4.1

根據題目，有 4+5+8+3=20 枚硬幣，總方法數為 $\binom{20}{2}$, 結果如圖:

Outcome	X	P(X=x)
$(2,2)$	4	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{4\times3}{20\times19} = \frac{3}{95}$
$(2,1),(1,2)$	3	$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{4\times5}{\frac{20\times19}{2}} = \frac{2}{19}$
$(2,0.5),(0.5,2)$	2.5	$\frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{4\times8}{\frac{20\times19}{2}} = \frac{16}{95}$
$(2,0.2),(0.2,2)$	2.2	$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{4\times3}{\frac{20\times19}{2}} = \frac{6}{95}$
$(1,1)$	2	$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{5\times4}{20\times19} = \frac{1}{19}$
$(1,0.5),(0.5,1)$	1.50	$\frac{\binom{5}{1}\binom{8}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{5\times8}{\frac{20\times19}{2}} = \frac{4}{19}$
$(1,0.2),(0.2,1)$	1.20	$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{5\times3}{\frac{20\times19}{2}} = \frac{3}{38}$
$(0.5,0.5)$	1	$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{8\times7}{20\times19} = \frac{14}{95}$
$(0.5,0.2),(0.2,0.5)$	0.70	$\frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{8\times3}{\frac{20\times19}{2}} = \frac{12}{95}$
$(0.2,0.2)$	0.40	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{\frac{20\times19}{2}} = \frac{3}{190}$

$$P\{X=x\} = \begin{cases} \frac{3}{95}, & \text{if } x=4 \\ \frac{2}{19}, & \text{if } x=3 \\ \frac{16}{95}, & \text{if } x=2.5 \\ \frac{6}{95}, & \text{if } x=2.2 \\ \frac{1}{19}, & \text{if } x=2 \\ \frac{4}{19}, & \text{if } x=1.5 \\ \frac{3}{38}, & \text{if } x=1.2 \\ \frac{14}{95}, & \text{if } x=1 \\ \frac{12}{95}, & \text{if } x=0.7 \\ \frac{3}{190}, & \text{if } x=0.4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.14

$$\Omega = \{\text{all permutations}\}, \#\Omega = 5!$$

made by 陳家桓、林宸緯、馬翌翔 助教

在 Ω 裡，先考慮 X=0 的事件:Player 1 輸給 Player 2:

$$p(X=0)=\frac{\binom{5}{2}3!}{5!}=\frac{1}{2}$$

從 5 個數字隨機挑 2 個數字，小的給 Player1 大的給 Player2，剩下三個做 permutation

在 Ω 裡，考慮 X=1 的事件:Player 1 贏 Player 2，然後輸給 Player3:

$$p(X=1)=\frac{\binom{5}{3}2!}{5!}=\frac{1}{6}$$

從 5 個數字隨機挑 3 個，最大、次大、最小的數字分別給 Player3、Player1、Player2，剩下 2 個做 permutation

在 Ω 裡，考慮 X=2 的事件:Player1 贏 Player2 還有 Player3，然後輸給 Player4:

$$p(X=2)=\frac{\binom{5}{4}2}{5!}=\frac{1}{12}$$

從 5 個數字隨機挑 4 個，最大和次大的數字分別給 Player4 跟 Player1，其他兩個數字則任意給 Player2 以及 Player3，剩下 1 個給 Player5，Player2 的點數可能比 Player3 大或小

在 Ω 裡，考慮 X=3 的事件:Player1 只輸給 Player5

$$p(X=3)=\frac{3!}{5!}=\frac{1}{20}$$

Player5 和 Player1 先分別取走最大和最小的點數，Player4，Player3，Player2 點數大小情況不知要再做 permutation。

在 Ω 裡，考慮 X=4 的事件:Player1 全贏

$$p(X=4)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$$

Player1 先取走最大的點數，剩下 4 個做 permutation

$$P\{X=x\}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{if } x=0\\ \frac{1}{6}, & \text{if } x=1\\ \frac{1}{12}, & \text{if } x=2\\ \frac{1}{20}, & \text{if } x=3\\ \frac{1}{5}, & \text{if } x=4\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

4.17

CDF:

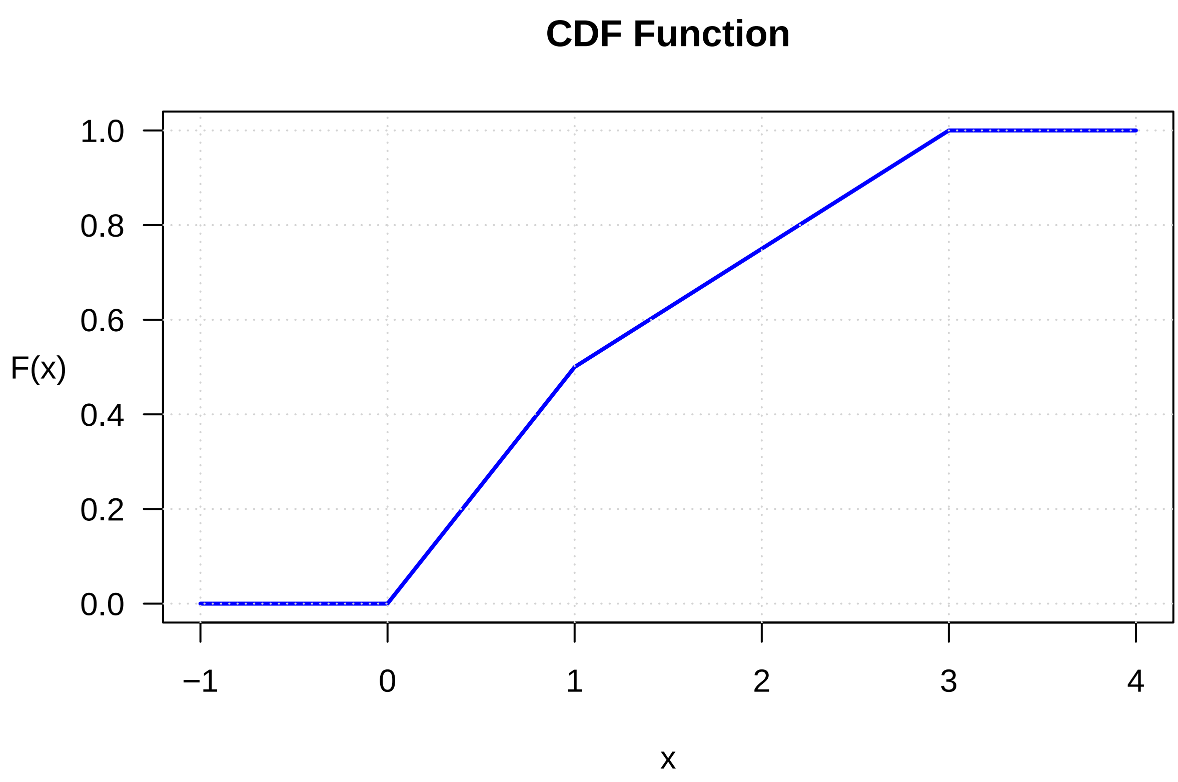
$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x<0\\ \frac{x}{2}, & \text{if } 0\le x<1\\ \frac{x+1}{4}, & \text{if } 1\le x<3\\ 1, & \text{if } x\ge 3\end{cases}$$

```
par(las=1)
# 定義 CDF 函數
F_x <- function(x) {
  ifelse(x < 0, 0,
         ifelse(x >= 0 & x < 1, x / 2,
                ifelse(x >= 1 & x < 3, (x + 1) / 4, 1)))
}

# 生成 x 值範圍
x_values <- seq(-1, 4, by = 0.01)

# 計算對應的 F(x) 值
F_values <- sapply(x_values, F_x)

# 繪製 CDF 函數圖
plot(x_values, F_values, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
     xlab = "x", ylab = "", main = "CDF Function",
     ylim = c(0, 1))
mtext("F(x)",side=2,line=2.5)
grid()
```



(a)

使用 CDF:

$$P(X<1)=F(1^-)=\frac{1}{2}$$

(b)

使用 CDF:

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

(c)

使用 CDF:

$$P(\frac{1}{3}<X<\frac{5}{3})=P(X<\frac{5}{3})-P(X\le\frac{1}{3})=F(\frac{5}{3}^-)-F(\frac{1}{3})=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

4.20

遊戲規則: 下注一元，若轉到紅色則贏一元並結束遊戲，若轉到不是紅色，則繼續下注一元兩次。

$X\Rightarrow$ 結束時獲得的錢，$W\Rightarrow$ 轉到紅色，$L\Rightarrow$ 沒有轉到紅色，情況如下圖:

case	獲得的錢	機率
$\{W\}$	1	$\frac{18}{38}=\frac{9}{19}$
$\{L,W,W\}$	$-1+1+1=1$	$\frac{20}{38}\times\frac{18}{38}\times\frac{18}{38}=\frac{810}{19^3}$
$\{L,W,L\}$	$-1+1-1=-1$	$\frac{20}{38}\times\frac{18}{38}\times\frac{20}{38}=\frac{900}{19^3}$
$\{L,L,W\}$	$-1-1+1=-1$	$\frac{20}{38}\times\frac{20}{38}\times\frac{18}{38}=\frac{900}{19^3}$
$\{L,L,L\}$	$-1-1-1=-3$	$\frac{20}{38}\times\frac{20}{38}\times\frac{20}{38}=\frac{1000}{19^3}$

(a)

$$P(X>0)=\frac{9}{19}+\frac{810}{19^3}=\frac{4059}{19^3}$$

(b)

$$P(X>0)=\frac{4059}{19^3}=\frac{4059}{6859}>0.5$$

贏錢機率大於 0.5，我們有較大的機會贏錢，但這並不能保證平均來說會獲利，還需要分析期望值。

(c)

$$E(X)=1\times\frac{4059}{19^3}+(-1)\times\frac{900+900}{19^3}+(-3)\times\frac{1000}{19^3}=\frac{-741}{6859}$$

由期望值來看，平均來說獲利 <0，這是因為贏一元的機率雖然 >0.5，但輸錢卻有可能會輸到 3 元，這個策略是不好的。

4.22

兩個隊伍比賽，誰先贏 i 場就結束比賽，令 A 贏比賽的機率為 p，B 贏比賽的機率是 1-p，

定義:$N \equiv$ 比賽總場數，$W \equiv$ A 贏，$L \equiv$ B 贏

(a)

i=2，N 的可能性只有 N=2 或 N=3 兩種。

第一種 N=2:(1)A 贏兩場，B 沒贏 (2)B 贏兩場，A 沒贏

$$P(N=2) = P(WW) + P(LL) = p^2 + (1-p)^2$$

第二種 N=3: (1) 第三場 A 贏，前兩場 A 與 B 各贏一場 (共 2 種情況) (2) 第三場 B 贏，前兩場 A 與 B 各贏一場 (共 2 種情況)

$$P(N=3) = 1 - P(N=2) = 1 - (p^2 + (1-p)^2)) = 2p(1-p)$$
$$E(N) = 2 \times P(N=2) + 3 \times P(N=3) = 2 \times (p^2 + (1-p)^2) + 3 \times 2p(1-p) = -2p^2 + 2p + 2$$

找 E(N) 的最大值:

$$\frac{\partial E(N)}{\partial p} = -4p + 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 E(N)}{\partial p^2} = -4 < 0$$

所以當 $p = \frac{1}{2}$ 時，E(N) 有最大值。

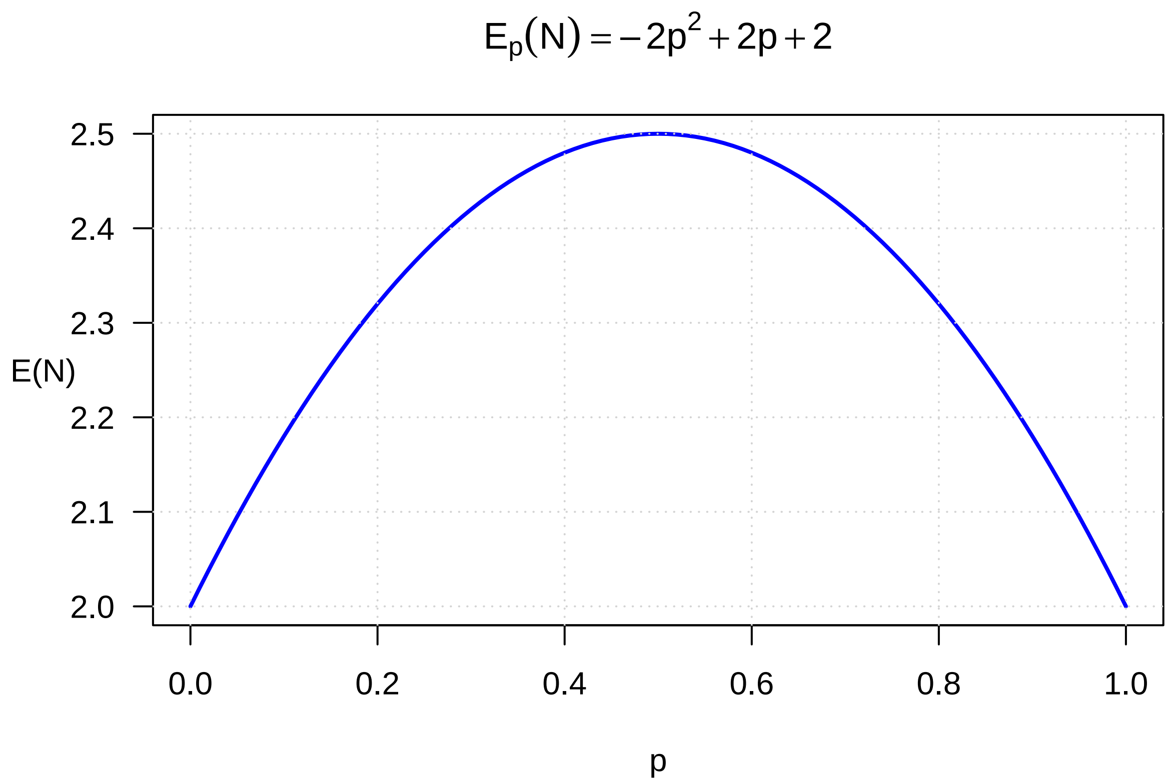
E(N) 函數圖形

```
f_p <- function(x) {
  -2 * x^2 + 2 * x + 2
}

# 生成 p 值範圍
p_values <- seq(0, 1, by = 0.01)

# 計算對應的 f(p) 值
f_values <- f_p(p_values)

par(las=1)
# 繪製函數圖
plot(p_values, f_values, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
     xlab = "p", ylab = "", main = expression(E[p](N)==-2*p^2+2*p+2))
mtext("E(N)",side=2,line=2)
grid()
```



由圖形來看也和推導結果符合。

(b)

i=3，N 的可能性只有 N=3,4,5 三種。

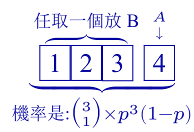
N=3

(1)A 贏三場，B 沒贏 (2)B 贏三場，A 沒贏

$$P(N=3) = P(WWW) + P(LLL) = p^3 + (1-p)^3$$

N=4

(1) 前 3 場中 A 贏 2 場，B 贏 1 場，第 4 次 A 贏



(2) 前 3 場中 B 贏 2 場，A 贏 1 場，第 4 次 B 贏

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}}^{\text{任取一個放 A}}\ \overset{B}{\overset{\downarrow}{\boxed{4}}}}_{\text{機率是:}\binom{3}{1}\times p(1-p)^3}$$

$$\Longrightarrow P(N=4)=\overbrace{3p^3(1-p)}^{(1)}+\overbrace{3p(1-p)^3}^{(2)}$$

N=5

(1) 前四場中，A 與 B 各贏 2 場，最後一場 A 贏

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}}^{\text{任取 2 個放 B}}\ \overset{A}{\overset{\downarrow}{\boxed{5}}}}_{\text{機率是:}\binom{4}{2}\times\left(p^2(1-p)^2\times p\right)}$$

(2) 前四場中，A 與 B 各贏 2 場，最後一場 B 贏

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}}^{\text{任取 2 個放 B}}\ \overset{B}{\overset{\downarrow}{\boxed{5}}}}_{\text{機率是:}\binom{4}{2}\times\left(p^2(1-p)^2\times(1-p)\right)}$$

$$P(N=5)=\overbrace{\left(\binom{4}{2}\times\left(p^2(1-p)^2\times p\right)\right)}^{(1)}+\overbrace{\left(\binom{4}{2}\times\left(p^2(1-p)^2\times(1-p)\right)\right)}^{(2)}=6p^2(1-p)^2$$

$$\begin{aligned}E(N)&=3\times P(N=3)+4\times P(N=4)+5\times P(N=5)\\&=3p^3+3(1-p)^3+4(3p^3(1-p)+3p(1-p)^3)+5\left(6p^2(1-p)^2\right)\\&=3\times(2p^4-4p^3+p^2+p+1)\end{aligned}$$

找 E(N) 的最大值:

$$\frac{\partial E(N)}{\partial p}=24p^3-36p^2+6p+3=0\Rightarrow 8p^3-12p^2+2p+1=0$$

$$\Rightarrow(2p-1)(4p^2-4p-1)=0\Rightarrow p=\frac{1}{2},or\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ 不在 0 和 1 之間

$$\frac{\partial^2E(N)}{\partial p^2}=72p^2-72p+6$$

代入 $p=\frac{1}{2}$,

$$\frac{\partial^2E(N)}{\partial p^2}=72p^2-72p+6=18-36+6=-12<0$$

$p=\frac{1}{2}$ 時，E(N) 有最大值。

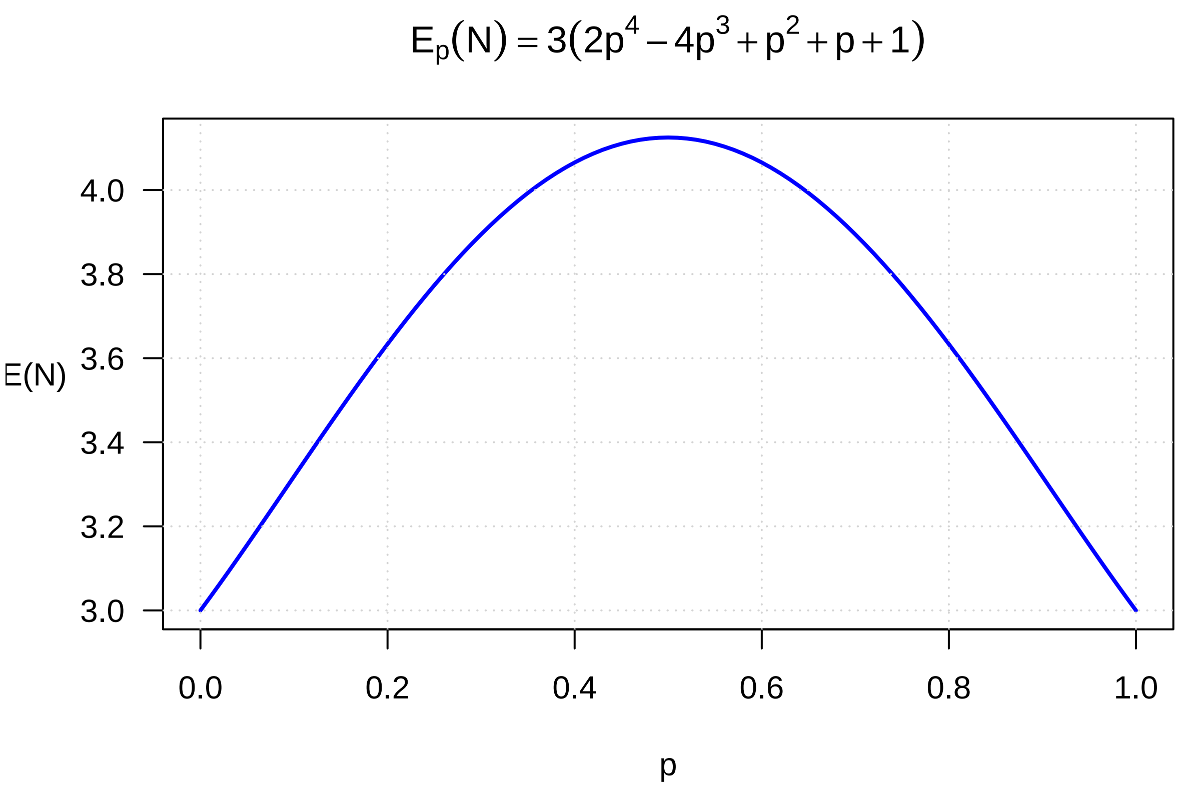
E(N) 函數圖形:

```r
# 定義函數 f(p)
f_p <- function(p) {
  3 * (2 * p^4 - 4 * p^3 + p^2 + p + 1)
}

# 生成 p 值範圍
p_values <- seq(0, 1, by = 0.01)

# 計算對應的 f(p) 值
f_values <- f_p(p_values)

par(las=1)
# 繪製函數圖
plot(p_values, f_values, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
     xlab = "p", ylab = "", main = expression(E[p](N)==3 * (2 * p^4 - 4 * p^3 + p^2 + p + 1)))
mtext("E(N)",side=2,line=2.5)
grid()
```



由函數圖形來看，跟推導結果符合。

4.39

(a)

$$E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = 1 + 9 = 10$$

$$E((4X-1)^2) = E(16X^2) - E(8X) + 1 = 10 \times 16 - 8 \times 3 + 1 = 137$$

(b)

$$Var(5-2X) = 4Var(X) = 4$$

TE2

$$Let\ W = e^X,\ then$$

$$F_W(w) = Pr(W \leq w) = Pr(e^X \leq w) = Pr(X \leq ln(w)) = F_X(ln(w))$$

TE4

(a)

$$Presume\ \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2},\ then$$

$$a \times (n+1)(n+2) + b \times (n)(n+2) + c \times (n)(n+1) = 4$$

$$\Longrightarrow (a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a = 4 \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}) \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \overset{m=n+1}{=} 2 \left\{ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{(\star)} - \underbrace{\sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)}_{(\star\star)} \right\} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\star) & : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = 1 \\ (\star\star) & : \qquad\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow (\star) - (\star\star) = \frac{1}{2}$$

made by 陳家桓、林宸緯、馬翌翔 助教

(b)

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)(n+2)}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=2$$

(c)

$$E(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+1)(n+2)}=4\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2})$$

$$=4\Big\{-\frac{1}{2}+(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})+(\frac{2}{4}-\frac{1}{4})+(\frac{2}{5}-\frac{1}{5})+\dots\Big\}$$

$$=-2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\rightarrow\infty$$

$$\Big(Since\ \int_3^{\infty}\frac{1}{x}dx\ diverges\ \ we\ can\ apply\ the\ integral\ test\ for\ convergence.\Big)$$

If you don't know this test, you may browse this page!

TE5

(i)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big((a_1+\dots+a_j)Pr(N=j)\Big)$$

$$=a_1Pr(N=1)+(a_1+a_2)Pr(N=2)+\dots+(a_1+\dots+a_n)Pr(N=n)+\dots$$

$$=a_1\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}Pr(N=i)}_{Pr(N\geq 1)}+a_2\underbrace{\sum_{j=2}^{\infty}Pr(N=j)}_{Pr(N\geq 2)}+a_3\underbrace{\sum_{k=3}^{\infty}Pr(N=k)}_{Pr(N\geq 3)}\dots$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}a_iPr(N\geq i)$$

(ii)

$$E[N] = \sum_{j=1}^{\infty} j \times Pr(N = j) = Pr(N = 1) + 2Pr(N = 2) + ...$$

$$= 1 \times Pr(N = 1) + (1 + 1)Pr(N = 2) + (1 + 1 + 1)Pr(N = 3) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} Pr(N \geq i)$$

$$(\star) : \Big(Set\ a_k = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}^+,\ and\ substitute\ a_k = 1\ into\ this\ identity : \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + \cdots + a_j)Pr(N = j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Pr(N \geq i)\Big)$$

(iii)

$$E[N(N + 1)] = \sum_{j=1}^{\infty} j(j + 1)Pr(N = j) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(j + 1)}{2} Pr(N = j) \overset{(\star\star)}{=} 2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 + 2 + \cdots + j)Pr(N = j)$$

$$\overset{(\star\star\star)}{=} 2 \sum_{i=1}^{\infty} iPr(N \geq i)$$

$$\begin{cases} (\star\star) \quad : \frac{j(j+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + j \\ (\star\star\star) : Set\ a_k = k,\ \forall k \in \mathbb{Z}^+,\ and\ substitute\ a_k = k\ into : \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + \cdots + a_j)Pr(N = j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Pr(N \geq i) \end{cases}$$

TE7

$$E[(X - \mu)^3] = E[(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3)] = E[X^3] - 3\underbrace{(\mu^2 + \sigma^2)}_{E(X^2)}\mu + 3\mu^3 - \mu^3 = E[X^3] - 3\sigma^2\mu - \mu^3$$

$$\Big(We\ used\ the\ fact\ \ that\ E(X^2) = Var(X) + \left(E(X)\right)^2 = \sigma^2 + \mu^2.\Big)$$