機率論 HW03

符號註記

我們用ANS代表該題的答案。

3.16

令A爲女生在生育期間爲吸菸者的事件，根據題目P(A)=0.32。
令B爲女生得到異位妊娠的事件，根據題目當女生爲吸菸者時得到異位妊娠的機率是當女生不爲吸菸者時得到異位妊娠機率的兩倍，所以我們有 $P(B|A) = 2P(B|A^c)$。
女生在有異位妊娠的情況下爲吸菸者的機率爲

$$ANS = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B \cap A) + P(B \cap A^c)}$$

$$= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

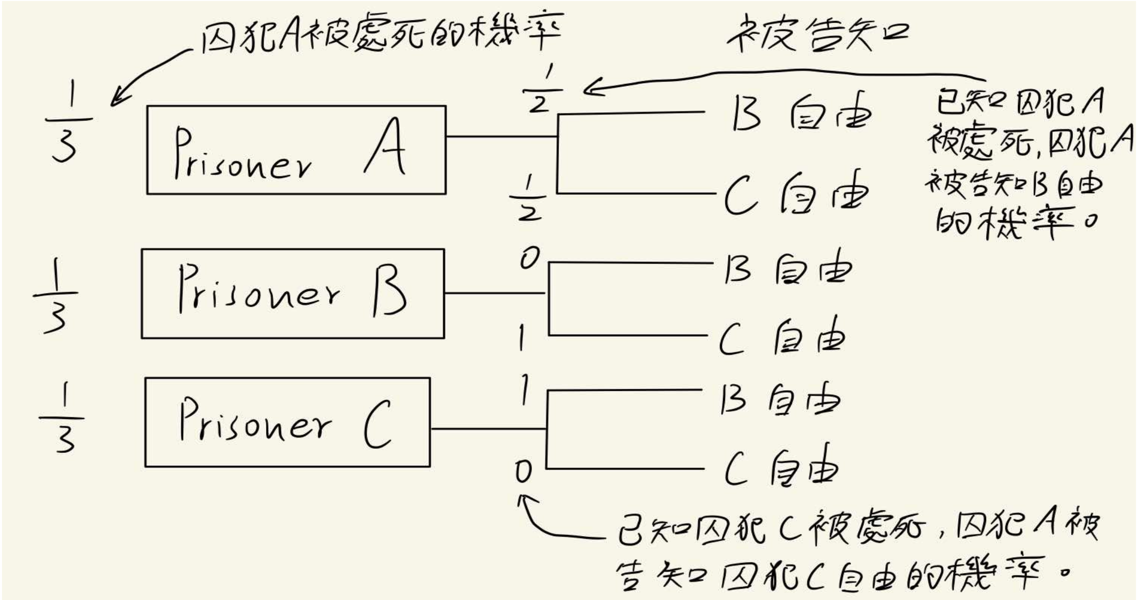
$$= \frac{P(B|A) \times 0.32}{P(B|A) \times 0.32 + P(B|A^c) \times (1 - 0.32)}$$

$$= \frac{2P(B|A^c) \times 0.32}{2P(B|A^c) \times 0.32 + P(B|A^c) \times 0.68}$$

$$= \frac{2 \times 0.32}{2 \times 0.32 + 1 \times 0.68} = \frac{0.64}{1.32} = 0.4848$$

3.46

令A爲囚犯A被處死的事件，令B爲囚犯B被處死的事件，令C爲囚犯C被處死的事件，根據題目$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$。令F爲囚犯A被告知囚犯B會自由的事件，則$F^c$爲囚犯A被告知囚犯C會自由的事件。



根據上面的示意圖，囚犯A在被獄卒告知囚犯B會自由下被處死的機率為

$$P(A|F) = \frac{P(A\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

事實上，

$$P(A) = P(A|F) = P(A|F^c) = \frac{1}{3}$$

這代表A和F(或F^c)兩個事件是獨立的。

所以說不管獄卒有沒有通知囚犯A另外兩名囚犯B和C誰會自由，都不會影響囚犯A被處死的機率；因此，獄卒的想法是錯的，原因是因為囚犯A被告知囚犯B會自由的機率在已知囚犯A或C被處死時的機率並不相等，也就是說$P(F|A) = \frac{1}{2} \neq 1 = P(F|C)$。
如果$P(F|A) = P(F|C)$成立的話，

$$P(A|F) = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F|A)P(A)+P(F|B)P(B)+P(F|C)P(C)}$$

$$= \frac{P(F|A)P(A)}{P(F|A)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+P(F|C)\times\frac{1}{3}} = \frac{P(F|C)\times\frac{1}{3}}{P(F|C)\times\frac{1}{3}+P(F|C)\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

才會是獄卒所想的結果。

3.48

令M爲投保人是男性的事件，令F爲投保人是女性的事件，
根據題目$P(M)=\alpha$、$P(F)=1-\alpha$。
令C_m爲男性投保人提出索賠的事件，令C_f爲女性投保人提出索賠的事件，
根據題目$P(C_m)=p_m$、$P(C_f)=p_f$。
令A_i爲投保人在第i年提出索賠的事件，$i=1$,2。
本題我們假設在投保人是男性(或女性)的前提下，第一年提出索賠的事件和第二年提出索賠的事件是獨立的，也就是說
$P(A_1\cap A_2|F)=P(A_1|F)P(A_2|F)$、$P(A_1\cap A_2|M)=P(A_1|M)P(A_2|M)$。

由於

$$P(A_1)=P(A_1\cap M)+P(A_1\cap F)=P(A_1|M)P(M)+P(A_1|F)P(F)=p_m\alpha+p_f(1-\alpha)$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{P(A_1\cap A_2|F)P(F)+P(A_1\cap A_2|M)P(M)}{P(A_1|M)P(M)+P(A_1|F)P(F)}=\frac{p_f^2(1-\alpha)+p_m^2\alpha}{p_m\alpha+p_f(1-\alpha)}$$

所以這時我們需要證明$(p_m\alpha+p_f(1-\alpha))^2<p_f^2(1-\alpha)+p_m^2\alpha \quad \text{for} \quad 0<\alpha<1$，就會推導出$P(A_1)<P(A_2|A_1)$。
令$f(x)=x^2$，$f''(x)=2>0$，所以f(x)是個凸函數，根據凸函數的性質和 $p_m\neq p_f$，
我們得到

$$f(\alpha p_m+(1-\alpha)p_f)<\alpha f(p_m)+(1-\alpha)f(p_f)$$

for $0<\alpha<1$ 。
根據上述的性質可以推出

$$f(\alpha p_m+(1-\alpha)p_f)=(\alpha p_m+(1-\alpha)p_f)^2<\alpha f(p_m)+(1-\alpha)f(p_f)=\alpha p_m^2+(1-\alpha)p_f^2$$

for $0<\alpha<1$。

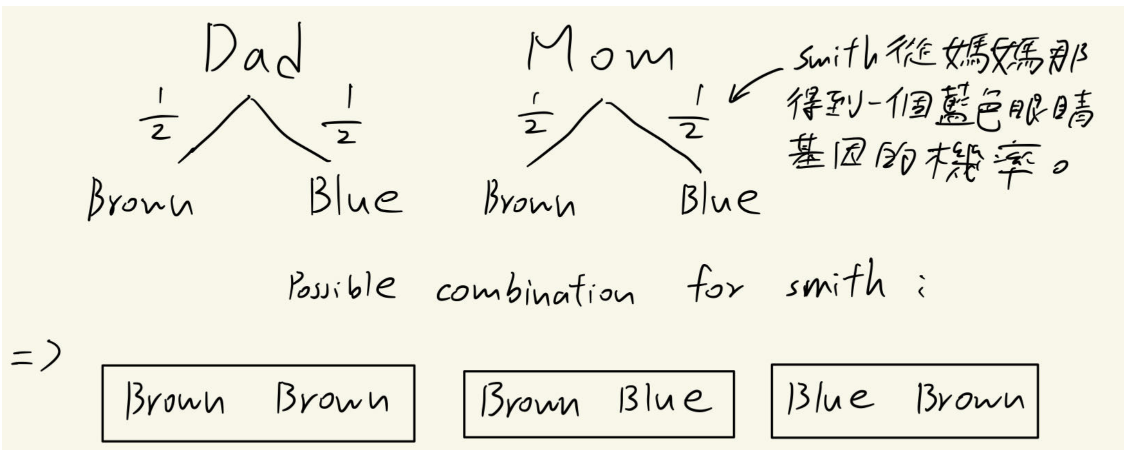
因此，$P(A_1)<P(A_2|A_1)$，這代表說在已知投保人第一年已經提出索賠的條件下緊接著第二年依舊會提出索賠的機率是比投保人在第一年會提出索賠的機率來得高的。由於 $p_m\neq p_f$ ，不失一般性我們給定 $p_m>p_f$，
則$P(A_1)<p_m \Rightarrow P(M|A_1)=\frac{P(A_1|M)P(M)}{P(A_1)}=P(M)\times\frac{p_m}{P(A_1)}>P(M)$ ，這代表說在給定條件A_1底下，投保人爲男性的機率$P(M|A_1)$已經比不知A_1是否發生時投保人爲男性的機率P(M)變得更高。又因爲男性的索賠機率較高($p_m>p_f$)，故當該投保人變得更有可能是男性之後，下一年該投保人的索賠可能性也會隨之變高。

3.65

根據題目，若一個人有兩個棕色眼睛的基因，又或者各有一個棕色眼睛的基因和藍色眼睛的基因，那這個人就會有一雙棕色的眼睛；若一個人有兩個藍色眼睛的基因，那這個人就會有一雙藍色的眼睛。

(a)

根據題目Smith有一雙棕色的眼睛，Smith的姐姐有一雙藍色的眼睛，這代表Smith的姐姐有兩個藍色眼睛的基因；由於Smith父母都是棕色眼睛，這代表說Smith父母兩個人都各有一個棕色眼睛的基因和藍色眼睛的基因，所以說Smith他可能有兩個棕色眼睛的基因又或者他棕色眼睛的基因和藍色眼睛的基因都各有一個。
令A_1爲Smith各有一個棕色眼睛基因和藍色眼睛基因的事件；令A_2爲Smith有兩個棕色眼睛基因的事件。

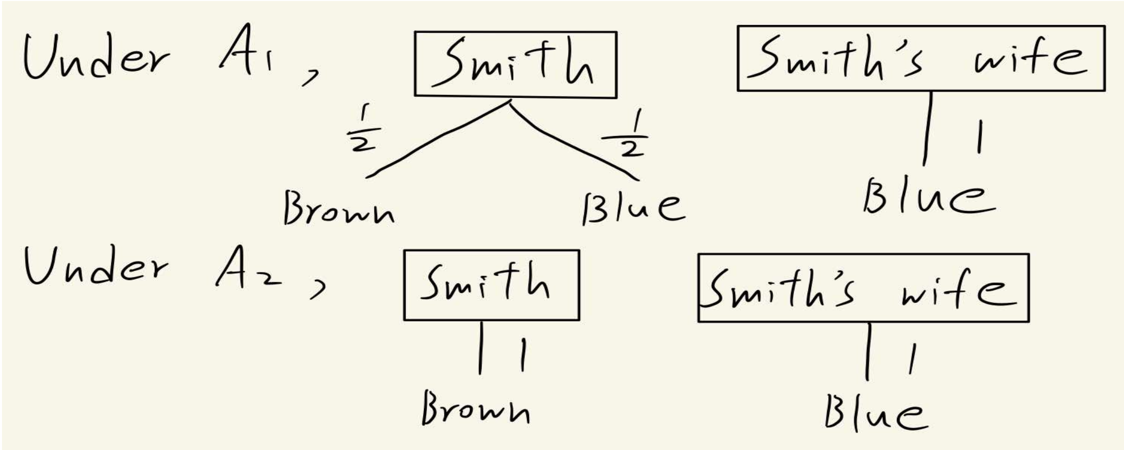


所以說Smith有一個藍色眼睛基因的機率爲

$$ANS = P(A_1) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(b)

令U爲Smith第一個小孩爲藍色眼睛的事件。
根據題目，Smith的妻子爲藍色眼睛，這代表Smith的妻子有兩個藍色眼睛的基因。



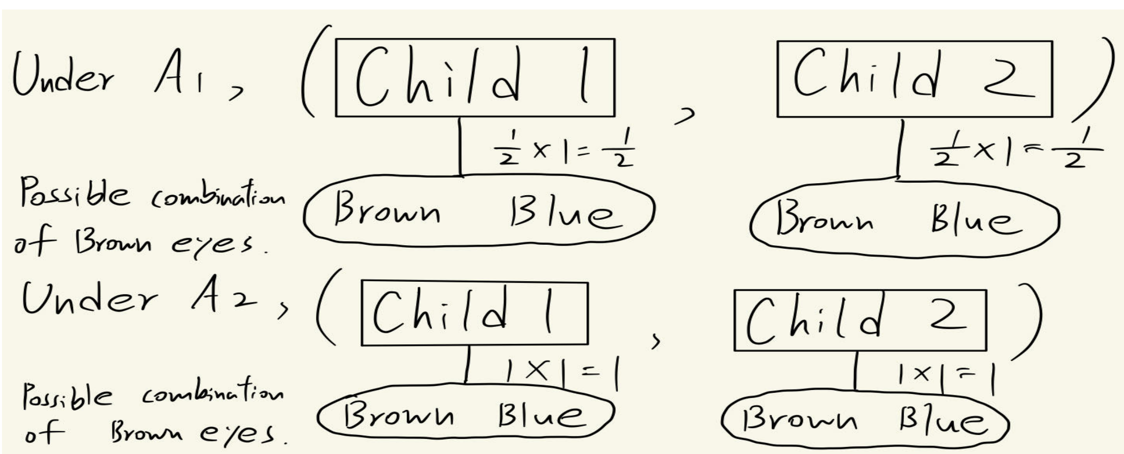
$$ANS = P(U) = P(U|A_1)P(A_1) + P(U|A_2)P(A_2) = (\frac{1}{2} \times 1) \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(c)

令B_1爲Smith第一個小孩是棕色眼睛的事件，令B_2爲Smith第二個小孩是棕色眼睛的事件。

藉由part(a)，我們有$P(A_1) = \frac{2}{3}$，$P(A_2) = 1 - P(A_1) = \frac{1}{3}$。

假設第一個小孩和第二小孩彼此獨立情況下，在已知Smith第一個小孩是棕色眼睛，則第二個小孩是棕色眼睛的機率爲



$$ANS = P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap B_2|A_1)P(A_1) + P(B_1 \cap B_2|A_2)P(A_2)}{P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2)}$$

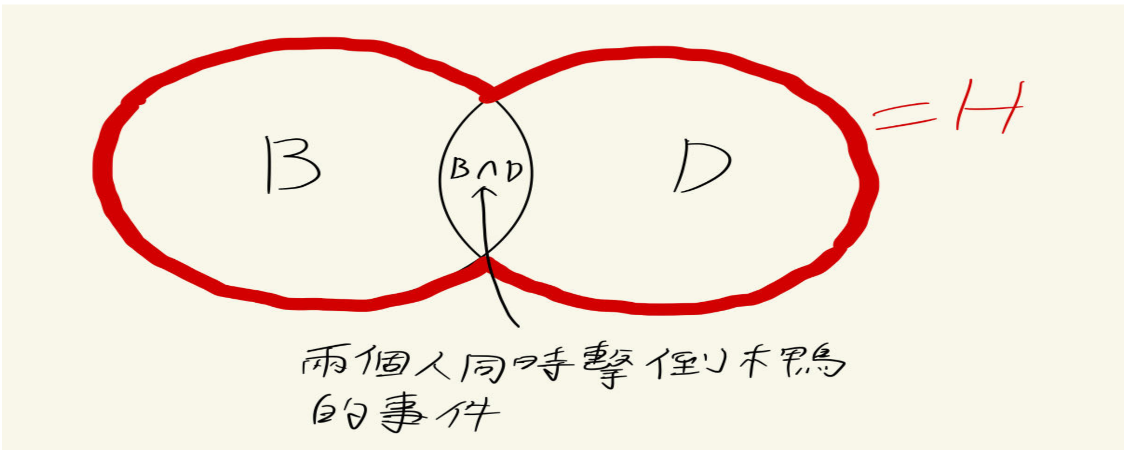
$$= \frac{(\frac{1}{2})^2 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

made by 黃子維,李京罡,呂俊嘉 助教

3.67

令H爲木鴨被射擊到的事件；令B爲Barbara射擊到木鴨的事件；令D爲Dianne射擊到木鴨的事件，則$H = B \cup D$。根據題目，$P(B) = p_1$，$P(D) = p_2$。
由於Barbara和Dianne是同時進行射擊的，所以我們假設事件B和D彼此是獨立的，也就是說$P(B \cap D) = P(B)P(D)$。故$P(H) = P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$。

(a)



根據題目，在已知木鴨被擊倒的情況下，Barbara和Dianne同時擊倒木鴨的機率爲

$$ANS = P(B \cap D|H) = \frac{P((B \cap D) \cap H)}{P(H)} = \frac{P(B \cap D)}{P(H)} = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

(b)

藉由part(a)，已知$P(H) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$
根據題目，在已經知道木鴨被擊倒的情況下，Barbara擊倒木鴨的機率爲

$$ANS = P(B|H) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)} = \frac{P(B)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

這題我們假設B和D事件是獨立的，可以注意到

$$P(D|H) = \frac{P(D \cap H)}{P(H)} = \frac{P(D)}{P(H)} = \frac{p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

所以有以下的結果

$$P(B \cap D|H) = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \neq \frac{p_1 p_2}{(p_1 + p_2 - p_1 p_2)^2} = P(B|H) \times P(D|H)$$

這告訴我們說即使B和D事件是獨立的，但在條件機率底下卻未必依舊獨立。

made by 黃子維,李京罡,呂俊嘉 助教

3.70

以下以 1、2、3、4、5 代表閘 1、2、3、4、5 可接通的事件，則 $1^c\,2^c\,3^c\,4^c\,5^c$ 表示閘 1、2、3、4、5 未接通的事件

(a)

第一個電路圖中，想計算的事件是 $((1\cap2)\cup(3\cap4))\cap5$，令 $A_1 = 1\cap2$，$A_2 = 3\cap4$，$A_3 = A_1\cup A_2$，$A_4 = A_3 \cap 5 = (A_1 \cup A_2) \cap 5 = ((1\cap2)\cup(3\cap4))\cap 5$，示意圖如下

$$\underbrace{A_1 \cup A_2}_{A_3}$$

$$\underbrace{A_3 \quad \cap \quad 5}_{A_4}$$

$ANS:$

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P(A_3 \cap 5) = P(A_3) \times p_5 = P(A_1 \cup A_2) \times p_5 \\ &= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) \times p_5 \\ &= (p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4) \times p_5 \end{aligned}$$

(另解，列舉)

閘 1 閘 2 有接通: $\{1\ 2\ 3\ 4\}\{1\ 2\ 3^c\ 4\}\{1\ 2\ 3\ 4^c\}\{1\ 2\ 3^c\ 4^c\}$

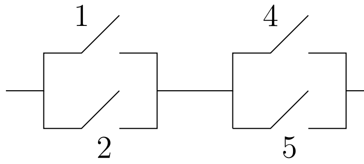
閘 3 閘 4 有接通: $\{1\ 2\ 3\ 4\}\{1^c\ 2\ 3\ 4\}\{1\ 2^c\ 3\ 4\}\{1^c\ 2^c\ 3\ 4\}$

其中$\{1\ 2\ 3\ 4\}$重複，要注意不重複計算

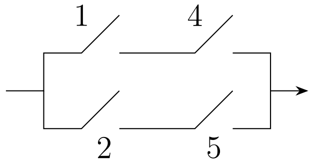
$ANS:$

$$p_5\times[p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2(1-p_3)p_4 + p_1p_2p_3(1-p_4) + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4) + (1-p_1)p_2p_3p_4 + p_1(1-p_2)p_3p_4 + (1-p_1)(1-p_2)p_3p_4] = p_5 \times [p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4]_{\#}$$

(b)



通電事件:$\{(1\cup2)\cap(4\cup5)\}\cap 3$



通電事件:$\{(1\cap4)\cup(2\cap5)\}\cap 3^c$

想計算兩事件聯集，且兩事件互斥。

$ANS:$

$$
\begin{aligned}
P(\text{通電}) &= P((((1\cup 2)\cap(4\cup 5))\cap 3)\cup(((1\cap 4)\cup(2\cap 5))\cap 3^c)) \\
&= P((1\cup 2)\cap(4\cup 5)\cap 3)+P(((1\cap 4)\cup(2\cap 5))\cap 3^c) \\
&= P(1\cup 2)\times P(4\cup 5)\times p_3+P((1\cap 4)\cup(2\cap 5))\times(1-p_3) \\
&= (p_1+p_2-p_1p_2)\times(p_4+p_5-p_4p_5)\times p_3 \\
&\quad +(P(1\cap 4)+P(2\cap 5)-P((1\cap 4)\cap(2\cap 5)))\times(1-p_3) \\
&= (p_1+p_2-p_1p_2)\times(p_4+p_5-p_4p_5)\times p_3+(p_1p_4+p_2p_5-p_1p_2p_4p_5)\times(1-p_3)
\end{aligned}
$$

(另解，列舉)

$$
\begin{aligned}
\text{閘 3 通電:}\quad & \{1\ 2\ 4\ 5\}\{1\ 2\ 4^c\ 5\}\{1\ 2\ 4\ 5^c\} \\
& \{1\ 2^c\ 4\ 5\}\{1\ 2^c\ 4^c\ 5\}\{1\ 2^c\ 4\ 5^c\} \\
& \{1^c\ 2\ 4\ 5\}\{1^c\ 2\ 4^c\ 5\}\{1^c\ 2\ 4\ 5^c\} \\
\text{閘 3 開啓:}\quad & \{1\ 2^c\ 4\ 5^c\}\{1\ 2^c\ 4\ 5\}\{1\ 2\ 4\ 5^c\} \\
& \{1^c\ 2\ 4^c\ 5\}\{1^c\ 2\ 4\ 5\}\{1\ 2\ 4^c\ 5\} \\
& \{1\ 2\ 4\ 5\}
\end{aligned}
$$

P(通電)=P(通電|閘 3 通電)P(閘 3 通電)+P(通電|閘 3 開啓)P(閘 3 開啓)

$= p_3\times$

$$
\begin{aligned}
&[p_1p_2p_4p_5+p_1p_2(1-p_4)p_5+p_1p_2p_4(1-p_5)+p_1(1-p_2)p_4p_5+p_1(1-p_2)(1-p_4)p_5 \\
&\quad +p_1(1-p_2)p_4(1-p_5)+(1-p_1)p_2p_4p_5+(1-p_1)p_2(1-p_4)p_5+(1-p_1)p_2p_4(1-p_5)]
\end{aligned}
$$

$+(1-p_3)\times$

$$
\begin{aligned}
&[p_1(1-p_2)p_4(1-p_5)+p_1(1-p_2)p_4p_5+p_1p_2p_4(1-p_5)+(1-p_1)p_2(1-p_4)p_5+(1-p_1)p_2p_4p_5 \\
&\quad +p_1p_2(1-p_4)p_5+p_1p_2p_4p_5]
\end{aligned}
$$

$= p_3\times(p_1+p_2-p_1p_2)\times(p_4+p_5-p_4p_5)+(1-p_3)\times[p_1p_4+p_2p_5-p_1p_2p_4p_5]_{\#}$

3.81

聲明兩項事實: (1)輸贏只會出現在偶數場 (假設 A 贏 x 場，B 贏 x-2 或 x+2 場，則總局數是偶數)

(2)最終兩場必是某方連勝, 且 若尚未勝出，從比賽開始每兩局必是一勝一敗

$ex.\{\underline{AA}\}, \{\underline{BA}\ \underline{AA}\}, \{\underline{AB}\ \underline{BA}\ \underline{BB}\}, \{\underline{AB}\ \underline{BA}\ \underline{BA}\ \underline{AB}......\}$

(a)

$ANS:$

$$\begin{aligned}
P(\text{四局結束}) &= P(\text{四局結束 |A 贏}) \times P(\text{A 贏}) && +P(\text{四局結束 |B 贏}) \times P(\text{B 贏}) \\
&= [P(\{ABAA\}) + P(\{BAAA\})] \times p && +[P(\{ABBB\}) + P(\{BABB\})] \times (1-p)) \\
&= [P_2^2 p^3 (1-p)^1] \times p && +[P_2^2 p^1 (1-p)^3] \times (1-p) \\
&= 2p(1-p)^3 + 2p^3(1-p)_{\#}
\end{aligned}$$

(b)

A 勝出的事件爲

{首兩局 A 勝}，{首兩局平，末兩局 A 勝}，{首兩局平，次兩局平，末兩局 A 勝}...

$ANS:$

$$\begin{aligned}
P(A\text{贏}) &= p^2 + \underbrace{[P_2^2 p(1-p)]^1}_{\text{首兩局平}} \times \underbrace{p^2}_{\text{末兩局勝}} + \underbrace{[P_2^2 p(1-p)]^2}_{\text{首、次兩局皆平}} \times \underbrace{p^2}_{\text{末兩局勝}} + ... \\
&= p^2 \times [1 + 2p(1-p) + (2p(1-p))^2 + (2p(1-p))^3 + ... \quad] \\
&= p^2 \times \frac{1}{1-2p(1-p)}_{\#}
\end{aligned}$$

3.86

(a)

令 H 爲一開始投硬幣頭朝上的事件，則 $T = H^c$ 爲一開始投硬幣頭朝下的事件，令 R 爲投骰子結果爲紅色的事件。
ANS :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|H) \times P(H) + P(R|T) \times P(T) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

令"3red" 爲第三次投骰子結果爲紅色的事件，令"2red" 爲前兩次投骰子結果皆爲紅色的事件。
ANS :

$$P(3red|2red) = P(3red|2red \cap H) \times P(H|2red) + P(3red|2red \cap T) \times P(T|2red)$$

$$= \frac{4}{6} \times \underbrace{\frac{\overbrace{\frac{1}{2} \times (\frac{4}{6})^2}^{\text{硬幣正面，用 A 骰子投出兩次紅色}}}{\underbrace{\frac{1}{2} \times (\frac{4}{6})^2}_{\text{硬幣正面，用 A 骰子投兩次紅色}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times (\frac{2}{6})^2}_{\text{硬幣反面，用 B 骰子投兩次紅色}}}}_{P(H|2red)} + \frac{2}{6} \times \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{2}{6})^2}{\frac{1}{2} \times (\frac{4}{6})^2 + \frac{1}{2} \times (\frac{2}{6})^2}$$

$$= \frac{3}{5}_{\#}$$

意義:$P(3red|2red) = \frac{3}{5} > \frac{1}{2} = P(red)$ ，已知投出兩次紅色後，第三次紅色機率會增加。

(c)

令 A_2 爲用 A 骰子投出前兩次皆爲紅色的事件，令 B_2 爲用 B 骰子投出前兩次皆爲紅色的事件。符號同上，已知前兩次投骰子皆爲紅色，用 A 骰子投出兩次紅色的機率爲
ANS :

$$\begin{aligned} P(A_2|2red) &= \frac{P(A_2 \cap 2red)}{P(2red)} \\ &= \frac{P(A_2)}{P(2red|A_2)P(A_2) + P(2red|B_2)P(B_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{4}{6})^2}{\underbrace{1 \times (\frac{1}{2} \times (\frac{4}{6})^2)}_{\text{硬幣正面，用 A 骰子投兩次紅色}} + \underbrace{1 \times (\frac{1}{2} \times (\frac{2}{6})^2)}_{\text{硬幣反面，用 B 骰子投兩次紅色}}} = \frac{4}{5}_{\#} \end{aligned}$$

意義:$\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$ 即，已知投出兩次紅色後，是使用 A 骰子的機率增加了。

8.89

(a)

by hint

$$P\{A \subset B\} = \sum_{i=0}^{n} \underline{P(A \subset B|N(B)=i)}P(N(B)=i)$$

$P(A \subset B|N(B)=i)$ 的意義是:B 這個 subset 有 i 個元素時，A 包含於 B 的機率。此時 A 的可能集合數有 2^i 個。
因爲 A 和 B 是 2^n 個 subset 中任一個的機率都一樣

$\Omega \to \#\Omega = 2^n \times 2^n = 4^n$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 2^n & 2^n \\ (\square, & \square) \\ \text{A} & \text{B} \end{array} \leftarrow \text{all subsets of S}$$

$$\text{機率} = \frac{\text{符合事件的 (A,B) 個數}}{4^n}$$

$$P(N(B)=i) = \frac{2^n \times \binom{n}{i}}{4^n} = \frac{\binom{n}{i}}{2^n}$$

$$P(A \subset B|N(B)=i) = \frac{\#\{\{A \subset B\} \cap \{N(B)=i\}\}}{\#\{N(B)=i\}} = \frac{2^i \times \binom{n}{i}}{2^n \times \binom{n}{i}} = \frac{2^i}{2^n}$$

$$P(A \subset B|N(B)=i)P(N(B)=i) = \underbrace{\frac{\binom{n}{i}}{2^n}}_{N(b)=i\text{時},B\text{可以是}n\text{取}i\text{個}subset\text{之一}} \times \underbrace{\frac{2^i}{2^n}}_{A\text{包含於該}B\text{的 subset 數，即}2^i}$$
$$= \frac{1}{4^n} \times \binom{n}{i} \times 2^i$$

Then, $ANS:$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(A \subset B|N(B)=i)P(N(B)=i) &= \frac{1}{4^n} \times (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i) \\ &= \frac{1}{4^n} \times (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i 1^{n-i}) \\ &= \frac{1}{4^n} \times 3^n = (\frac{3}{4})^n \quad \#\end{aligned}$$

(b)

$$P(A \cap B = \phi) = P(A \subset B^c) \underset{\downarrow}{=} P(A \subset B) = (\frac{3}{4})^n \quad \#$$

因爲 B^c 也是由 2^n subsets 中任取一個，每個 subset 機率相同，與情況 (a) 一模一樣

made by 黃子維, 李京罡, 呂俊嘉 助教

8.94

(a)

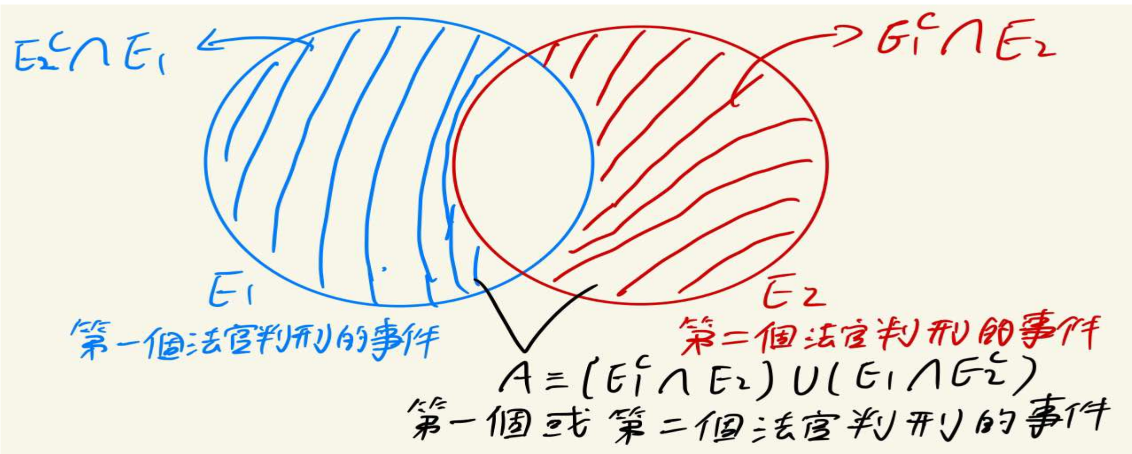
根據題目，我們令 E_1 爲第一位法官判刑的事件，E_2 爲第二位法官判刑的事件，E_3 爲第三位法官判刑的事件。
令 G 爲一個人眞實有罪的事件，所以 G^c 爲一個人眞實無罪的事件，則 P(G)=0.7，P(G^c)=0.3；根據題目，已知一個人爲眞實有罪 (或無罪) 時，法官間彼此的判決是獨立的，也就是說在給定 G(或 G^c) 時，E_1, E_2, E_3 是 mutually independent.

$$ANS = P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)}$$

$$= \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3|G) \times P(G) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3|G^c) \times P(G^c)}{P(E_1 \cap E_2|G) \times P(G) + P(E_1 \cap E_2|G^c) \times P(G^c)}$$

$$= \frac{(0.7)^3 \times (0.7) + (0.2)^3 \times (0.3)}{(0.7)^2 \times (0.7) + (0.2)^2 \times (0.3)} = \frac{0.2425}{0.355} = \frac{97}{142} = 0.683 \ _{\#}$$

(b)



$ANS:$

$$P(E_3|(E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)) = \frac{P(\ \ E_3 \cap (\ (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)\ )\ \ )}{P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c))}$$

$$= \frac{P(E_3 \cap (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)|G) \times P(G) + P(E_3 \cap (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)|G^c) \times P(G^c)}{P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)|G) \times P(G) + P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)|G^c) \times P(G^c)}$$

故 $ANS:$

$$\frac{[\ 2(0.7)(0.3)\ ](0.7) \times (0.7) + [\ 2(0.2)(0.8)\ ](0.2) \times (0.3)}{[\ 2(0.7)(0.3)\ ] \times (0.7) + [\ 2(0.2)(0.8)\ ] \times (0.3)} = \frac{0.375}{0.650} = \frac{15}{26}_{\#}$$

made by 黃子維, 李京罡, 呂俊嘉 助教

(c)

Similar to (a),

$$P(E_3|E_1^c \cap E_2^c) = \frac{[(0.3)^2](0.7)\times(0.7)+[(0.8)^2](0.2)\times(0.3)}{[(0.3)^2]\times(0.7)+[(0.8)^2]\times(0.3)} = \frac{11}{34}_{\#}$$

Additional problem

Q:AreE_1, E_2, E_3 independent?

A:Results shown by (a)(b)(c),given E_1, E_2happens or not will change probability of occurrence of E_3,so E_1, E_2, E_3 are not independent.

Q:Are they conditionally independent?

A:Yes,according to the problem statement ,given tried person is guilty (or not),each judges will vote guilty(or not guilty) independently.