

Solution Manual**Homework 3**

Email: didil0907@gmail.com (李友棣) / hs113024515@gapp.nthu.edu.tw (黃子維)

NTHU MATH 2810, Probability (Sep ~ Dec 2025)

Term: Fall 2025

Instructor: Shao-Wei Cheng

Date: October 2, 2025

Problem 3.14.

Suppose that an ordinary deck of 52 cards (which contains 4 aces) is randomly divided into 4 hands of 13 cards each. We are interested in determining p , the probability that each hand has an ace. Let E_i be the event that the i th hand has exactly one ace. Determine $p = P(E_1 E_2 E_3 E_4)$ by using the multiplication rule.

*Solution:*1. 計算 $P(E_1)$

這是第一手牌 (13 張) 中恰好有一張 A 的機率。總共有 $\binom{52}{13}$ 種方式可以從 52 張牌中選出 13 張牌。為了讓這手牌恰好有一張 A，我們需要從 4 張 A 中選出 1 張 ($\binom{4}{1}$ 種方式)，並從 48 張非 A 牌中選出 12 張 ($\binom{48}{12}$ 種方式)。

$$P(E_1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

2. 計算 $P(E_2|E_1)$

這是在第一手牌已有一張 A 的條件下，第二手牌 (13 張) 也恰好有一張 A 的機率。在第一手牌發完後，牌堆中還剩下 $52 - 13 = 39$ 張牌。其中，A 有 $4 - 1 = 3$ 張，非 A 牌有 $48 - 12 = 36$ 張。

$$P(E_2|E_1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{36}{12}}{\binom{39}{13}}$$

3. 計算 $P(E_3|E_1 \cap E_2)$

這是在前兩手牌各有一張 A 的條件下，第三手牌 (13 張) 也恰好有一張 A 的機率。此時，牌堆中還剩下 $39 - 13 = 26$ 張牌。其中，A 有 $3 - 1 = 2$ 張，非 A 牌有 $36 - 12 = 24$ 張。

$$P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{\binom{2}{1} \binom{24}{12}}{\binom{26}{13}}$$

4. 計算 $P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

這是在前三手牌各有一張 A 的條件下，第四手牌 (13 張) 也恰好有一張 A 的機率。此時，牌堆中還剩下 $26 - 13 = 13$ 張牌。其中，A 有 $2 - 1 = 1$ 張，非 A 牌有 $24 - 12 = 12$ 張。第四手牌必然是由這剩下的 13 張牌組成，所以它必定包含 1 張 A 和 12 張非 A 牌。

$$P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{\binom{1}{1} \binom{12}{12}}{\binom{13}{13}} = 1$$

最後，由乘法原則(列式即可)：

$$p = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Problem 3.27.

The following method was proposed to estimate the number of people over the age of 50 who reside in a town of known population 100,000: “As you walk along the streets, keep a running count of the percentage of people you encounter who are over 50. Do this for a few days; then multiply the percentage you obtain by 100,000 to obtain the estimate.” Comment on this method.

Hint: Let p denote the proportion of people in the town who are over 50. Furthermore, let α_1 denote the proportion of time that a person under the age of 50 spends in the streets, and let α_2 be the corresponding value for those over 50. **What quantity does the method suggested estimate? When is the estimate approximately equal to p ?**

Solution:

題目的方法存在一個問題，那就是它假設在街上遇到的人的分佈與整個城鎮的人口分佈是相同的。

- 設 $N = 100,000$ 為總人口。
- 設 p 為城鎮中 50 歲以上人口的真實比例，則 $1 - p$ 為城鎮中 50 歲以下人口的真實比例。
- 城鎮中 50 歲以上的人數為 Np 。
- 城鎮中 50 歲以下的人數為 $N(1 - p)$ 。
- 設 α_1 為 50 歲以下的人平均走在街上的時間比例。
- 設 α_2 為 50 歲以上的人平均走在街上的時間比例。

在任何給定的時間點，街上「50 歲以下」的平均總人數可以視為與 $N(1 - p)\alpha_1$ 成正比。同樣地，街上「50 歲以上」的平均總人數可以視為與 $Np\alpha_2$ 成正比。

因此，在街上遇到的人中，50 歲以上的人所佔的比例 (p_{est}) 實際上是：

$$p_{\text{est}} = \frac{\text{街上 50 歲以上的人數}}{\text{街上總人數}} = \frac{Np\alpha_2}{N(1 - p)\alpha_1 + Np\alpha_2} = \frac{p\alpha_2}{(1 - p)\alpha_1 + p\alpha_2}$$

以上方法並非直接估計真實的比例 p ，而是估計 p_{est} ，其值取決於 α_1 和 α_2 ，即不同年齡群體在街上花費的時間比例。

為了讓 p_{est} 等於真實比例 p ，必須滿足以下條件：

$$p = \frac{p\alpha_2}{(1 - p)\alpha_1 + p\alpha_2}$$

假設 $p \neq 0$ ，我們可以將兩邊同除以 p ：

$$1 = \frac{\alpha_2}{(1 - p)\alpha_1 + p\alpha_2}$$

$$(1 - p)\alpha_1 + p\alpha_2 = \alpha_2$$

$$(1 - p)\alpha_1 = \alpha_2 - p\alpha_2$$

$$(1 - p)\alpha_1 = \alpha_2(1 - p)$$

假設 $p \neq 1$ ，我們可以將兩邊同除以 $(1 - p)$ ：

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

因此，該估計方法只有在 50 歲以下和 50 歲以上的人群平均花在街上的時間比例相同（即 $\alpha_1 = \alpha_2$ ）時才是準確的。若 $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow p_{\text{est}} < p \Rightarrow$ 題目中的方法會容易低估 (under-estimate)；若 $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow p_{\text{est}} > p \Rightarrow$ 題目中的方法會容易高估 (over-estimate)。

Problem 3.31.

Twenty persons are attending a meeting in a hall, 8 of whom left the hall and have returned at least once so far. Four persons have just left and are coming back. This coincides with the selection of a subcommittee of 4 persons who will be chosen by everyone. What is the probability that all subcommittee members will have never left the hall?

Solution:

- 目前，8 位「曾離開者」與 12 位「未離開者」。
- 首先，隨機選出 4 人離開，這會改變「未離開者」的人數；然後再從變化後的 20 人中選出委員會。
- 考慮所有「剛離開者」的來源組合（以變數 x 代表其中來自「曾離開者」的人數）。
- 令 $E_x, x = 0, 1, 2, 3, 4$ ，為剛離開的 4 人中「曾離開者」的人數為 x 的事件，則 E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 形成一個 sample space 的 partition，故根據 law of total probability：

$$\begin{aligned}
 P(\text{所有成員都未離開過}) &= \sum_{x=0}^4 P(\text{最終事件}|E_x)P(E_x) \\
 &= \sum_{x=0}^4 \left(\frac{\binom{12-(4-x)}{4}}{\binom{20}{4}} \times \frac{\binom{8}{x}\binom{12}{4-x}}{\binom{20}{4}} \right) \\
 &= \frac{1}{\left(\binom{20}{4}\right)^2} \sum_{x=0}^4 \binom{8+x}{4} \binom{8}{x} \binom{12}{4-x} \\
 &= \frac{900900}{(4845)^2} \\
 &= \frac{900900}{23474025} \approx \mathbf{0.0384}
 \end{aligned}$$

實際上，本題可以看作是一個 urn problem (抽球問題)，原本共有 20 顆白球，每次取出的球，放回時，都會變成紅球。一開始，先取 8 顆，再放回。接著，再取 4 顆，再放回，最後，再取 4 顆，計算其皆為白球的機率。

Problem 3.46.

Three prisoners are informed by their jailer that one of them has been chosen at random to be executed and the other two are to be freed. Prisoner A asks the jailer to tell him privately which of his fellow prisoners will be set free, claiming that there would be no harm in divulging this information because he already knows that at least one of the two will go free. The jailer refuses to answer the question, pointing out that if A knew which of his fellow prisoners were to be set free, then his own probability of being executed would rise from $\frac{1}{3}$ to $\frac{1}{2}$ because he would then be one of two prisoners. What do you think of the jailer's reasoning?

Solution:

- 設 A, B, C 分別代表囚犯 A、B、C 將被處決的事件，其中

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

- 設 J_B 為典獄長說「囚犯 B 將被釋放」的事件。

假設囚犯 A 想要知道，在典獄長說出「B 將被釋放」之後，他自己被處決的機率是多少。也就是說，我們需要計算條件機率 $P(A|J_B)$ ：

$$P(A|J_B) = \frac{P(J_B|A) \cdot P(A)}{P(J_B)}$$

- $P(A)$ 是 A 被處決的機率，即 $\frac{1}{3}$ 。
- $P(J_B|A)$ 是「如果 A 將被處決，典獄長說 B 將被釋放」的機率。如果 A 將被處決，那麼 B 和 C 都將被釋放。典獄長不能告訴 A 他自己的情況，所以他必須從 B 和 C 中隨機選擇一人告知。因此

$$P(J_B|A) = \frac{1}{2}$$

- $P(J_B)$ 是典獄長說「B 將被釋放」的機率：

$$P(J_B) = P(J_B|A)P(A) + P(J_B|B)P(B) + P(J_B|C)P(C)$$

- 如果 A 被處決（機率 $\frac{1}{3}$ ），典獄長有一半的機率說 B 被釋放。故 $P(J_B|A)P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。
- 如果 B 被處決（機率 $\frac{1}{3}$ ），典獄長不能說 B 被釋放，因此 $P(J_B|B) = 0$ 。
- 如果 C 被處決（機率 $\frac{1}{3}$ ），那麼 A 和 B 將被釋放。因為 A 問的是他的「同伴」，典獄長不能說 A 被釋放，所以他必須說 B 被釋放，因此 $P(J_B|C) = 1$ 。故 $P(J_B|C)P(C) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ 。

將這些加起來：

$$P(J_B) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

最後，代入公式：

$$P(A|J_B) = \frac{P(J_B|A) \cdot P(A)}{P(J_B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

因此，**即使在典獄長告知「B 將被釋放」之後，A 被處決的機率仍然是 $\frac{1}{3}$** ，典獄長的推理是錯誤的。同理，若典獄長的回答由「B 將被釋放」換成「C 將被釋放」，亦可求得相同的結果。

Problem 3.48.

In any given year, a male automobile policyholder will make a claim with probability p_m and a female policyholder will make a claim with probability p_f , where $p_f \neq p_m$. The fraction of the policyholders that are male is α , $0 < \alpha < 1$. A policyholder is randomly chosen. If A_i denotes the event that this policyholder will make a claim in year i , show that

$$P(A_2|A_1) > P(A_1)$$

Give an intuitive explanation of why the preceding inequality is true.

Solution:

在任何一年中，男性汽車保單持有人提出索賠的機率為 p_m ，女性保單持有人提出索賠的機率為 p_f ，其中 $p_f \neq p_m$ 。男性保單持有人的比例為 α ，其中 $0 < \alpha < 1$ 。隨機選擇一位保單持有人。如果 A_i 表示該保單持有人在第 i 年提出索賠的事件，請證明：

$$P(A_2|A_1) > P(A_1)$$

首先，我們定義相關事件和機率：

- M : 所選保單持有人是男性的事件。 $P(M) = \alpha$ 。
- F : 所選保單持有人是女性的事件。 $P(F) = 1 - \alpha$ 。
- A_i : 保單持有人在第 i 年提出索賠的事件。
- 我們已知條件機率：

$$P(A_i|M) = p_m$$

$$P(A_i|F) = p_f$$

步驟 1: 計算 $P(A_1)$

$$P(A_1) = P(A_1|M)P(M) + P(A_1|F)P(F) = \alpha p_m + (1 - \alpha)p_f$$

$$\text{同理亦可得 } P(A_2) = \alpha p_m + (1 - \alpha)p_f = P(A_1)$$

步驟 2: 計算 $P(A_2|A_1)$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1 \cap A_2|M)P(M) + P(A_1 \cap A_2|F)P(F)}{P(A_1)} = \frac{\alpha p_m^2 + (1 - \alpha)p_f^2}{\alpha p_m + (1 - \alpha)p_f}$$

由於給定性別後，各年索賠是獨立的，亦即假設 conditionally independent，例如： $P(A_1 \cap A_2|M) = P(A_1|M)P(A_2|M) = p_m^2$ 。

步驟 3: 欲證 $P(A_2|A_1) > P(A_1)$ (同理 $P(A_2|A_1) > P(A_2)$)

$$\frac{\alpha p_m^2 + (1 - \alpha)p_f^2}{\alpha p_m + (1 - \alpha)p_f} > \alpha p_m + (1 - \alpha)p_f$$

將分母乘到右邊：

$$\alpha p_m^2 + (1 - \alpha)p_f^2 > (\alpha p_m + (1 - \alpha)p_f)^2$$

展開右邊的平方項：

$$\alpha p_m^2 + (1 - \alpha)p_f^2 > \alpha^2 p_m^2 + 2\alpha(1 - \alpha)p_m p_f + (1 - \alpha)^2 p_f^2$$

將所有項移到左邊：

$$(\alpha - \alpha^2)p_m^2 + ((1 - \alpha) - (1 - \alpha)^2)p_f^2 - 2\alpha(1 - \alpha)p_m p_f > 0$$

提出公因式：

$$\alpha(1 - \alpha)p_m^2 + \alpha(1 - \alpha)p_f^2 - 2\alpha(1 - \alpha)p_m p_f > 0$$

再次提出公因式 $\alpha(1 - \alpha)$ ：

$$\alpha(1 - \alpha)(p_m^2 - 2p_m p_f + p_f^2) > 0$$

將括號內的項寫成完全平方式：

$$\alpha(1 - \alpha)(p_m - p_f)^2 > 0$$

其中， $0 < \alpha < 1$ 且 $p_m \neq p_f$ 。

WLOG，假設 $P_m > P_f$ (男性索賠機率較女性高)，則 $P(A_2|A_1) > P(A_2)$ ，直觀來看，能夠想成知道一個人在第一年提出了索賠 (事件 A_1) 這個條件後，這個人是男性的可能會比原本的 α 變得更高 (因 $p_m > p_f$ 故可推得 $P(M|A_1) = \frac{\alpha P_m}{\alpha P_m + (1 - \alpha)P_f} > \alpha = P(M)$) 而男性的索賠可能性又比女性高 ($P_m > P_f$)，故他在第二年再次索賠的機率 $P(A_2|A_1)$ 會高於我們在沒有任何資訊時對一個隨機的人所做的初始預測 $P(A_2)$ 。若換成 $p_m < p_f$ 套用相似的解釋方式，亦會有相同結論。

另一個直觀解釋如下 (假設 $p_m > p_f$):

1. 假設共有 N 人，其中男性有 $N\alpha$ 人，女性有 $N(1 - \alpha)$ 人。
 2. 預期第一年索賠會有男性 $N\alpha P_m$ 人，女性 $N(1 - \alpha)P_f$ 人，總共 $N \times P(A_1)$ 人。
 3. 在這 $NP(A_1)$ 人中，
 - 男性比例 $\frac{\alpha P_m}{P(A_1)} \Rightarrow$ 比所有 N 人中的男性比例 α 更高 ($\because P_m > P_f$)。
 - 女性比例 $\frac{(1 - \alpha)P_f}{P(A_1)} \Rightarrow$ 比所有 N 人中的女性比例 $1 - \alpha$ 更低。
 4. 因為男性索賠的可能性較女性高 ($P_m > P_f$)，而第一年索賠的 $NP(A_1)$ 個人中的男性比例又高於所有 N 個人中的男性比例，故在第一年索賠的 $NP(A_1)$ 個人中，第二年會索賠的比例 $P(A_2|A_1)$ ，會高於在所有 N 個人中，第二年會索賠的比例 $P(A_2)$ 。
-

3.60

根據題目，在同個班級中，有4個大一男生、6個大一女生、6個大二男生；已知當從該班級隨機選取一位學生時，性別和年級是獨立的。

令 y 為該班級大二的男生人數。

令 F 為學生是大一的事件，因此 $P(F) = \frac{10}{16+y}$

令 B 為學生是男生的事件。

令 B^C 為學生是女生的事件。

因為性別和年級是獨立的，因此我們有

$$\begin{aligned} P(F|B) &= P(F|B^C) = P(F) \\ \implies \frac{4}{10} &= \frac{6}{6+y} = \frac{10}{16+y} \end{aligned}$$

$$Ans : y = \frac{30-12}{2} = 9$$

3.63

假設有一枚不公正的硬幣(也就是擲出正面機率為 $p \neq \frac{1}{2}$)，我們想要利用以下的程序去產生一個公正的結果(也就是出現正面和反面機率皆相等)，如下所示：

Step 1: 擲一次硬幣

Step 2: 再擲一次硬幣

Step 3: 如果前面結果為兩次正面或反面，則回到Step 1

Step 4: 讓最後一次投擲的結果為本次試驗的結果

令 H 和 T 分別代表硬幣擲出正面和反面的事件。

令 H_R 和 T_R 分別為該次試驗回傳正面和反面的事件。

(a):

令 E_i 為(Step 1和Step 2)重複 $i-1$ 次，在第 i 次重複時停止(也就是出現 (H, T) 或 (T, H))的事件， $i = 1, 2, 3, \dots$ 。

令 r 為(Step 1和Step 2)需要再重來一次 $((H, H)$ 或 $(T, T))$ 的機率值，則 $r = p^2 + (1 - p)^2$ ，而 $1 - r = 2p(1 - p)$ 則為不必重來的機率值。則 $P(E_i) = r^{i-1}(1 - r)$ ， $i = 1, 2, 3, \dots$ 。

$$\begin{aligned} P(H_R|E_i) &= \frac{P(H_R \cap E_i)}{P(E_i)} \\ &= \frac{P(\text{前}i-1\text{次都是出現}(H,H)\text{或}(T,T), \text{第}i\text{次出現}(T,H))}{P(E_i)} \\ &= \frac{r^{i-1}p(1-p)}{r^{i-1}(1-r)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因為 $E_1, E_2, \dots$ 形成一個partition，故

$$\begin{aligned} P(H_R) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(H_R \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_R|E_i)P(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} r^{i-1}(1-r) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-r}{1-r} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

同樣地，所以我們有

$$P(T_R) = 1 - P(H_R) = \frac{1}{2}$$

因此，我們知道說就算是不公正的硬幣，只要依照上述的程序，出來的結果不論是正面或反面機率都一樣是 $\frac{1}{2}$ 。

(b):

若是我們把程序更改成持續投擲直到最後兩次出現不同的outcome時，我們一樣取最後一次當作是本次試驗的outcome，令 F_j 為在第 j 次投擲硬幣時停下的事件， $j = 2, 3, \dots$ 。

因為 $F_2, F_3, \dots$ 形成一個partition，故

$$\begin{aligned} P(H_R) &= \sum_{j=2}^{\infty} P(H_R \cap F_j) = \sum_{j=2}^{\infty} P(\text{前}j-1\text{次都是出現}T, \text{第}j\text{次出現}H) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} (1-p)^{j-1}p = \frac{1-p}{p} \times p = 1-p \end{aligned}$$

同樣地，所以我們有

$$P(T_R) = 1 - P(H_R) = p$$

由上可知，在更改程序後，機率值會根據本次試驗出來的結果而有所不同，所以不能夠

made by 黃子維, 李友棣 助教

made by 李友棣, 黃子維 助教

用(b)的程序去取代本題的程序。

3.68

根據題目，假設A和B射擊的結果互為獨立事件，A和B同時射擊，若是兩個都沒中，那就繼續重複下去，直到兩個互相命中對方或其中一方被命中。

令 p_A 和 p_B 分別為A擊中B和B擊中A的機率。

(a):

令A和 A^C 分別為整個duel停止時A會被射中和不會被射中的事件。令B和 B^C 分別為整個duel停止時B會被射中和不會被射中的事件。

令 $M = A \cap B$ 和 $M_N = A^C \cap B^C$ 分別為整個duel停止時兩者互相命中和兩者都沒命中的事件。

令 E_i 為彼此射擊 i 次後整個duel停止的事件， $i = 1, 2, \dots$ ，則 $E_1, E_2, \dots$ 形成一個partition。

令 $q_A = 1 - p_A, q_B = 1 - p_B$ ，則 $q_A q_B$ 為一個回合中兩者都沒命中的機率，且

$$P(E_i) = (q_A q_B)^{i-1} (1 - q_A q_B)。$$

所以

$$\begin{aligned} P(A^C) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A^C \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{前}i-1\text{次兩者都沒命中，第}i\text{次為B被射中A沒被射中}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (q_A q_B)^{i-1} p_A q_B = \frac{p_A q_B}{1 - q_A q_B} = \frac{p_A(1 - p_B)}{p_A + p_B - p_A p_B} \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(M) = \sum_{i=1}^{\infty} P(M \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{前}i-1\text{次兩者都沒命中，第}i\text{次兩者皆被射中}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (q_A q_B)^{i-1} p_A p_B = \frac{p_A p_B}{1 - q_A q_B} = \frac{p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B} \end{aligned}$$

(c):

Notice:

For (c),(d),(e) dual ends after the n th round有兩種解讀:

made by 黃子維, 李友棣 助教

made by 李友棣, 黃子維 助教

1. 在第 n 輪結束
2. 在第 n 輪後才結束 i.e. $n+1, n+2, \dots$ th 結束

$$P(\text{第 } n \text{ 回合時結束}) = P(E_n) = (q_A q_B)^{n-1} (1 - q_A q_B)$$

$$\begin{aligned} P(\text{在第 } n \text{ 回合之後才結束}) &= P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} P(E_i) \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (q_A q_B)^{i-1} (1 - q_A q_B) \\ &= \frac{(q_A q_B)^n}{1 - q_A q_B} \times (1 - q_A q_B) = \left((1 - p_A)(1 - p_B)\right)^n \end{aligned}$$

(d):

$$\begin{aligned} P(\text{第 } n \text{ 回合時結束} | A^C) &= \frac{P(E_n \cap A^C)}{P(A^C)} \\ &= \frac{(q_A q_B)^{n-1} p_A (1 - p_B)}{\frac{p_A (1 - p_B)}{1 - (1 - p_A)(1 - p_B)}} \\ &= \left[(1 - p_A)(1 - p_B)\right]^{n-1} (p_A + p_B - p_A p_B) \end{aligned}$$

若是第 n 回合之後才結束，我們有

$$\begin{aligned} P(\text{在第 } n \text{ 回合之後才結束} | A^C) &= \frac{P(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} (E_i \cap A^C))}{P(A^C)} \\ &= \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} (q_A q_B)^{i-1} p_A (1 - p_B)}{P(A^C)} \\ &= \frac{\frac{((1 - p_A)(1 - p_B))^n}{1 - (1 - p_A)(1 - p_B)} p_A (1 - p_B)}{\frac{p_A (1 - p_B)}{1 - (1 - p_A)(1 - p_B)}} \\ &= \left[(1 - p_A)(1 - p_B)\right]^n \end{aligned}$$

made by 黃子維, 李友棣 助教

made by 李友棣, 黃子維 助教

(e):

$$\begin{aligned}
 P(\text{第}n\text{回合時結束}|A \cap B) &= \frac{P(A \cap B \cap E_n)}{P(A \cap B)} \\
 &= \frac{(q_A q_B)^{n-1} p_A p_B}{\frac{p_A p_B}{1 - (1-p_A)(1-p_B)}} \\
 &= \left[(1-p_A)(1-p_B) \right]^{n-1} (p_A + p_B - p_A p_B)
 \end{aligned}$$

若是第 n 回合之後才結束，我們有

$$\begin{aligned}
 P(\text{第}n\text{回合之後才結束}|A \cap B) &= \frac{P(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} (A \cap B \cap E_i))}{P(A \cap B)} \\
 &= \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} (q_A q_B)^{i-1} p_A p_B}{\frac{p_A p_B}{1 - (1-p_A)(1-p_B)}} \\
 &= \frac{\frac{((1-p_A)(1-p_B))^n}{1 - (1-p_A)(1-p_B)} p_A p_B}{\frac{p_A p_B}{1 - (1-p_A)(1-p_B)}} \\
 &= \left[(1-p_A)(1-p_B) \right]^n
 \end{aligned}$$

3.89

(a):

令 $N(B)$ 為集合 B 裡面的元素數量。

$$\begin{aligned}
 P(A \subset B) &= \sum_{k=0}^n P(A \subset B, N(B) = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{(\text{對某個 } N(B) = k \text{ 的集合 } B, \text{ 其所有子集的數量}) \times (\text{在共 } n \text{ 個元素中 } B \text{ 有 } k \text{ 個的可能數量})}{2^n \times 2^n} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k \times C_k^n}{2^{2n}} \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} (1 + 2)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n
 \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned}
 P(AB = \emptyset) &= P(A \subset B^C) = P(A \subset B) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \\
 &\quad (\text{因為 } A \text{ 和 } B \text{ 皆為任意集合，因此把 } B \text{ 換成 } B^C \text{ 並不會影響結果})
 \end{aligned}$$

made by 黃子維, 李友棣 助教

made by 李友棣, 黃子維 助教

3.94

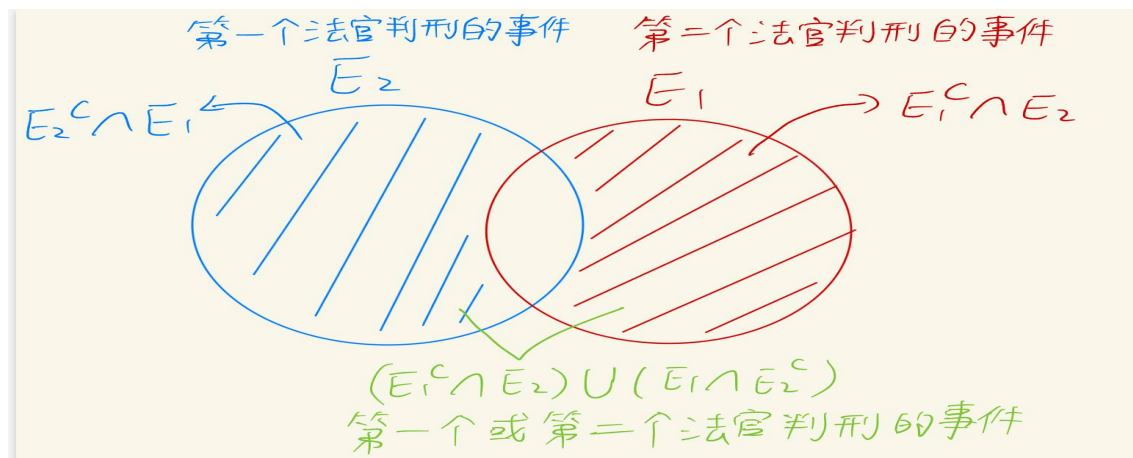
(a):

令 E_i 為第 i 位法官判刑有罪的事件, $i = 1, 2, 3$ 。

令 G 為一個人真實有罪的事件, 則 G^C 為一個人真實無罪的事件, 則 $P(G) = 0.7, P(G^C) = 0.3$; 根據題目, 已知一個人為真實有罪(或無罪)時, 法官間彼此的判決是獨立的, 這是 conditionally independent, 也就是說在給定 G (或 G^C) 時, E_1, E_2, E_3 是 mutually independent.

$$\begin{aligned}
 \text{ANS} = P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) &= \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)} \\
 &= \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \mid G)P(G) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \mid G^C)P(G^C)}{P(E_1 \cap E_2 \mid G)P(G) + P(E_1 \cap E_2 \mid G^C)P(G^C)} \\
 &= \frac{(0.7)^3 \cdot 0.7 + (0.2)^3 \cdot 0.3}{(0.7)^2 \cdot 0.7 + (0.2)^2 \cdot 0.3} = \frac{0.2425}{0.355} = \frac{97}{142} \approx 0.683.
 \end{aligned}$$

(b):



Notice: $E_2^C \cap E_1$ 和 $E_1^C \cap E_2$ 之間是 mutually exclusive, 故其聯集的機率值等於各自的機率值相加。並且 E_1, E_2, E_3 mutually independent, given G or G^C 會保證 $E_2^C \cap E_1$ 或 $E_1^C \cap E_2$ independent, given G or G^C 。

made by 黃子維, 李友棣 助教

made by 李友棣, 黃子維 助教

$$\begin{aligned}
P(E_3 \mid (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)) &= \frac{P(E_3 \cap [(E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)])}{P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c))} \\
&= \frac{P(E_3 \cap [(E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)] \mid G) P(G) + P(E_3 \cap [(E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)] \mid G^c) P(G^c)}{P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c) \mid G) P(G) + P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c) \mid G^c) P(G^c)} \\
&\stackrel{\text{獨立}}{=} \frac{P(E_3 \mid G) P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c) \mid G) P(G) + P(E_3 \mid G^c) P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c) \mid G^c) P(G^c)}{P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c) \mid G) P(G) + P((E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c) \mid G^c) P(G^c)} \\
&= \frac{0.7 \times [0.3 \times 0.7 + 0.7 \times 0.3] \times 0.7 + 0.2 \times [0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.8] \times 0.3}{[0.3 \times 0.7 + 0.7 \times 0.3] \times 0.7 + [0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.8] \times 0.3} \\
&= \frac{0.375}{0.650} = \frac{15}{26} \approx 0.577.
\end{aligned}$$

(c):

和(a)一樣，並且 E_1, E_2, E_3 mutually independent, given G or G^C 會保證 E_1, E_2^C, E_3^C 亦是 mutually independent, given G or G^C ，因此

$$P(E_3 \mid E_1^c \cap E_2^c) = \frac{[(0.3)^2](0.7) \times (0.7) + [(0.8)^2](0.2) \times (0.3)}{[(0.3)^2] \times (0.7) + [(0.8)^2] \times (0.3)} = \frac{11}{34}.$$

Additional problem

Q: Are E_1, E_2, E_3 independent?

A: No. If the events were independent, the probabilities in parts (a) and (c) would be equal. However, parts (a) and (c) show that whether E_1 and E_2 occur changes the conditional probability of event E_3 ; therefore E_1, E_2 and E_3 are not independent.

Q: Are they conditionally independent?

A: Yes. According to the problem statement, conditional on whether the defendant is guilty (G) or not (G^c), each judge votes guilty (or not) independently. Thus E_1, E_2, E_3 are mutually independent given G (or given G^c).