#5. (a) 每個元件都可以運行或失敗 $\Rightarrow 2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$ 種結果

(b) 系統運行的條件：元件1.2一起運行或元件3.4一起運行，或元件1.3.5一起運行

事件B：元件1.2一起運行

$B=\{(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,0,1,0),(1,1,0,0,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1),$
$(1,1,0,1,1),(1,1,1,1,1)\}$

事件C：元件3.4一起運行

$C=\{(0,0,1,1,0),(1,0,1,1,0),(0,1,1,1,0),(0,0,1,1,1),(1,1,1,1,0),(1,0,1,1,0),$
$(0,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$

事件D：元件1.3.5一起運行

$D=\{(1,0,1,0,1),(1,1,1,0,1),(1,0,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$

$W=B\cup C\cup D$

$W=\{(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,0,1,0),(1,1,0,0,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1),$
$(1,1,0,1,1),(1,1,1,1,1),(0,0,1,1,0),(1,0,1,1,0),(0,1,1,1,0),(0,0,1,1,1),$
$(1,0,1,1,0),(0,1,1,1,1),(1,0,1,0,1)\}$

(c) A事件：元件4.5一起失敗

$A=\{(0,0,0,0,0),(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(1,1,0,0,0),(1,0,1,0,0),$
$(0,1,1,0,0),(1,1,1,0,0)\}\Rightarrow 8$ outcomes.

(d) $A\cap W=\{(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0)\}$.

#13. E_i：閱讀 i 報紙的事件，$i=1,2,3$.

(a) 只閱讀I報紙的事件：$E_1\cap E_2^c\cap E_3^c$

$$P(E_1\cap E_2^c\cap E_3^c)=P(E_1)-P(E_1\cap E_2)-P(E_1\cap E_3)+P(E_1\cap E_2\cap E_3)$$
$$=10\%-8\%-2\%+1\%=1\%$$

只閱讀II報紙的事件：$E_2\cap E_1^c\cap E_3^c$

$$P(E_2\cap E_1^c\cap E_3^c)=P(E_2)-P(E_2\cap E_1)-P(E_2\cap E_3)+P(E_2\cap E_1\cap E_3)$$
$$=30\%-8\%-4\%+1\%=19\%$$

#13 (a) 只閱讀Ⅲ報紙的事件：$E_3 \cap E_1^c \cap E_2^c$

$P(E_3 \cap E_1^c \cap E_2^c) = P(E_3) - P(E_3 \cap E_1) - P(E_3 \cap E_2) + P(E_3 \cap E_1 \cap E_2)$

$= 5\% - 2\% - 4\% + 1\% = 0\%$

⇒只閱讀一家報紙的機率：$1\% + 19\% + 0\% = 20\%$

⇒只閱讀一家報紙的人數：$20\% \cdot 100000 = 20000$

(b) 只閱讀Ⅰ且Ⅱ報紙的事件：$E_1 \cap E_2 \cap E_3^c$

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) = P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 8\% - 1\% = 7\%$

只閱讀Ⅱ且Ⅲ報紙的事件：$E_1^c \cap E_2 \cap E_3$

$P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 4\% - 1\% = 3\%$

只閱讀Ⅰ且Ⅲ報紙的事件：$E_1 \cap E_3 \cap E_2^c$

$P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) = P(E_1 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 2\% - 1\% = 1\%$

閱讀Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ報紙的事件：$E_1 \cap E_2 \cap E_3$

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1\%$

⇒閱讀至少兩家報紙的機率：$7\% + 3\% + 1\% + 1\% = 12\%$.

⇒閱讀至少兩家報紙的人數：$12\% \cdot 100000 = 12000$

(c) 至少閱讀一家早報且閱讀晚報的事件：$(E_1 \cup E_3) \cap E_2$

$(E_1 \cup E_3) \cap E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_2)$

$P((E_1 \cup E_3) \cap E_2) = P((E_1 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_2)) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_3 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

⇒至少閱讀一家早報且閱讀晚報的機率：$8\% + 4\% - 1\% = 11\%$

⇒至少閱讀一家早報且閱讀晚報的人數：$11\% \times 100000 = 11000$

(d) 沒看任何報紙的事件：$E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c$

$E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c = (E_1 \cup E_2 \cup E_3)^c$

$P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P((E_1 \cup E_2 \cup E_3)^c) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

(d) 沒看任何報紙的機率: $100\%-(10\%+30\%+5\%-8\%-2\%-4\%+1\%)=68\%$

沒看任何報紙的人數: $68\%\cdot 100000=68000$

(e) 只看 I 且看 II 報紙的事件: $E_1\cap E_2\cap E_3^c$

$P(E_1\cap E_2\cap E_3^c)=P(E_1\cap E_2)-P(E_1\cap E_2\cap E_3)=8\%-1\%=7\%$

只看 III 且看 II 報紙的事件: $E_3\cap E_2\cap E_1^c$

$P(E_3\cap E_2\cap E_1^c)=P(E_3\cap E_2)-P(E_1\cap E_2\cap E_3)=4\%-1\%=3\%$

$\Rightarrow$ 只看一家早報且看晚報的機率: $7\%+3\%=10\%$

$\Rightarrow$ 只看一家早報且看晚報的人數: $10\%\cdot 100000=10000$

#17. $\underset{8男}{\overset{1}{\square}}\ \overset{2}{\square}\cdots\overset{16}{\square}\ \underset{\text{第九個女生}}{\overset{17}{\square}}\ \overset{18}{\square}\cdots\underset{6女}{\overset{24}{\square}}\ \underset{2男}{\overset{25}{\square}}$

隨機排序的總組數: $\binom{25}{15}$ (25個人有15個是女生)

第9個女生排在第17個位置: $\binom{16}{8}\binom{8}{6}$ (前16個人有8女, 後8個人有6女)

$\Rightarrow$ 第9個女生排在第17個位置的機率: $\dfrac{\binom{16}{8}\binom{8}{6}}{\binom{25}{15}}$

#26. E_i: 第一次出現 i 且贏了的事件, 則贏的事件為 $\bigcup_{i=2}^{12}E_i$, 且 E_i's 為 mutually exclusive

$P(E_2)=P(E_3)=P(E_{12})=0$ (第一次出現 2, 3, 12 就輸了)

$P(E_7)=\frac{6}{36}$ (一共有 $6\times 6=36$ 種骰子的組合, 出現總和為7的有 (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1))

$P(E_{11})=\frac{2}{36}$ (出現總和為11的有 (5,6), (6,5))

定義 $E_{i,n}$ 為第一次出現 i, 且在第 n 局獲勝的事件, 其中 $i\in\{2,3,7,11,12\}$, $n=2,3,\cdots$

則 $E_i=\bigcup_{n=2}^{\infty}E_{i,n}$ 且 $E_{i,n}$ 為 mutually exclusive

$$P(E_{4,n})=\underbrace{\left(\frac{3}{36}\right)}_{\text{第一次出現總和為4 ((1,3),(2,2),(3,1))}}\underbrace{\left(1-\frac{6}{36}-\frac{3}{36}\right)^{n-2}}_{\text{第2到第n-1次不能出現4和7}}\underbrace{\left(\frac{3}{36}\right)}_{\text{第n次出現總和為4}}$$

$$\Rightarrow P(E_4)=\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}}_{\text{從2開始因為至少要擲2次才會結束}}P(E_{4,n})=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}-\frac{3}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{36}\right)=\frac{1}{144}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=\frac{1}{144}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{144}\cdot 4=\frac{1}{36}$$

#26. $P(E_{10,n}) = \left(\frac{3}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}-\frac{3}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{36}\right) = P(E_{4,n})$

第一次總和出現10

((4,6),(5,5),(6,4))

$\Rightarrow P(E_{10}) = P(E_4) = \frac{1}{36}$

$P(E_{5,n}) = \left(\frac{4}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}-\frac{4}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{36}\right)$

第一次總和出現5

((1,4),(2,3)(3,2),(4,1))

$\Rightarrow P(E_5) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}-\frac{4}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{36}\right) = \frac{1}{81}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-2} = \frac{1}{81}\cdot\frac{1}{1-\frac{26}{36}} = \frac{1}{81}\cdot\frac{36}{10} = \frac{2}{45}$

$P(E_{9,n}) = \frac{4}{36}\left(1-\frac{6}{36}-\frac{4}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{36}\right) = P(E_{5,n})$

第一次總和出現9((3,6),(4,5),(5,4),(6,3))

$\Rightarrow P(E_9) = P(E_5) = \frac{2}{45}$

$P(E_{6,n}) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}-\frac{5}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{36}\right)$

第一次總和出現6((1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1))

$\Rightarrow P(E_6) = \sum_{n=2}^{\infty}P(E_{6,n}) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}-\frac{5}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{36}\right) = \left(\frac{5}{36}\right)^2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2} = \left(\frac{5}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{25}{36\cdot 11}$

$P(E_{8,n}) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}-\frac{5}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{36}\right) = P(E_{6,n})$

第一次總和出現8((2,6),(3,5),(4,4),(5,3)(6,2))

$\Rightarrow P(E_8) = P(E_6) = \frac{25}{36\cdot 11}$

$\Rightarrow$ 贏的機率: $\sum_{i=2}^{12}P(E_i) = \frac{6}{36}+\frac{2}{36}+2\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{45}+\frac{25}{36\cdot 11}\right)$

#28 (a) 一次取出3顆球的所有可能: $\binom{5+6+8}{3} = \binom{19}{3}$

取出3顆紅球: $\binom{5}{3}$, 取出3顆藍球: $\binom{6}{3}$, 取出3顆綠球: $\binom{8}{3}$

$\Rightarrow$ 一次取出3顆且3顆同色的機率: $\frac{\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}$

取後放回取3次的所有可能: 19^3

取出3顆紅球: 5^3, 取出3顆藍球: 6^3, 取出3顆綠球: 8^3

$\Rightarrow$ 取後放回取3次取到3顆同色的機率: $\frac{5^3+6^3+8^3}{19^3}$

#28(b) 一次取出3顆球的所有可能: $\binom{19}{3}$

一次取出3顆不同顏色球的可能: $\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}$

$\Rightarrow$ 一次取出3顆不同顏色球的機率: $\dfrac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}}$

取後放回取3次的所有可能: 19^3

取出3顆不同色的球: $5\cdot 6\cdot 8\cdot 3!$

第一次取一種(有3個可能)

第二次有2個可能

第三次有1個可能

$\Rightarrow$ 取後放回取3次取到3顆不同色的機率: $\dfrac{5\cdot 6\cdot 8\cdot 3!}{19^3}$

37.

(a)

$$P(\text{學生5題都會做}) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{12}$$

(b)

$$P(\text{學生會做4題以上}) = P(\text{學生會4題}) + P(\text{學生會5題})$$

$$= \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

40.

(a)

$$P(\text{至少1球是綠色}) = 1 - P(\text{沒有球是綠色})$$

$$= 1 - \frac{\binom{15}{4}}{\binom{22}{4}} = \frac{170}{209}$$

(b)

$$P(\text{每個顏色都有抽到}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{1}}{\binom{22}{4}} = \frac{24}{209}$$

45.

(a)

$$P(\text{key抽出不放回在第}k\text{次打開門}) = \frac{\binom{n-1}{k-1}(k-1)!\cdot 1}{\binom{n}{k}\cdot k!} = \frac{1}{n}$$

(b)

$$P(\text{key抽出放回在第}k\text{次打開門}) = \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}}_{\text{前}k-1\text{次都失敗}} \cdot \frac{1}{n}$$

48.

20個人生日的月份有 12^{20} 種可能

其中4個月包含2個人生日
另外4個月包含3個人生日

有 $\underbrace{\binom{12}{4}}_{\text{選月分}}\binom{8}{4}\cdot\underbrace{\frac{20!}{2!2!2!2!3!3!3!3!}}_{\text{除掉重覆的排列}}$

$$\therefore \text{prob} = \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\cdot\frac{20!}{2!2!2!2!3!3!3!3!}}{12^{20}}$$

$$= \frac{495\times 70\times \frac{20!}{2^4\,6^4}}{12^{20}}$$

$$\doteq 0.0010604201$$

54.

設 S_1, S_2, S_3, S_4 是4種花色

$P(\text{void in at least 1 suit})$

$= P(\text{void in } S_1 \cup \text{void in } S_2 \cup \text{void in } S_3 \cup \text{void in } S_4)$

(by prop 4.4)

$$= \sum_{i=1}^{4} P(\text{void in } S_i) - \sum_{i<j} P(\text{void in } S_i \cap \text{void in } S_j)$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(\text{void in } S_i \cap \text{void in } S_j \cap \text{void in } S_k)$$

$$- P(\text{void in } S_1 \cap \text{void in } S_2 \cap \text{void in } S_3 \cap \text{void in } S_4)$$

$$= \binom{4}{1}\cdot\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} - \binom{4}{2}\frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}} + \binom{4}{3}\frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}} - \underbrace{0}_{\text{不可能4種花色都沒有}} = \frac{1621364909}{31750677980} \doteq 0.05106552$$