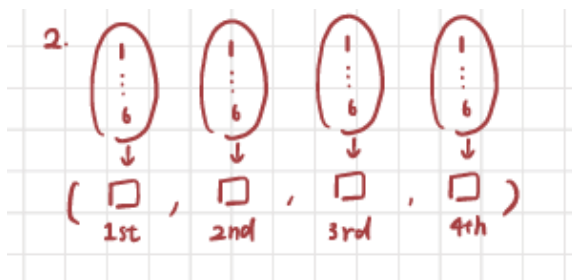


機率論 hw1

2.

每次擲骰子有可能的結果: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 且這次和下次結果並不相關, 所以共有 $ans = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ 種情況。



7.

(a)

3 男 3 女隨意排 (6 個相異物的總排列方法): $6! = 720$ 種排法

(b)

因為同性別要排在一起, 我們先考慮 3 男的總排列方法數 (可視為三相異物排列): $3!$

因為女生狀況同男生, 總方法數也是: $3!$

再考慮將此兩組 (各三個人) 排列的方法數 (可視為兩相異物排列): $2!$

依乘法原理得總方法數為:

$$ans = 3! \times 3! \times 2! = 72$$

(c)

此題考慮男生坐在一起的總方法數。所以我們先考慮 3 位男生的排列方法數 (3 相異物排列):

$$3!$$

接著我們將此 3 個男生視為一個新的物品考慮 3 位女生與此物品 (即 3 位男生) 的坐法共有 (4 相異物排列):

$$4!$$

依乘法原則得總排列數為:

$$ans = 3! \times 4! = 144$$

(d)

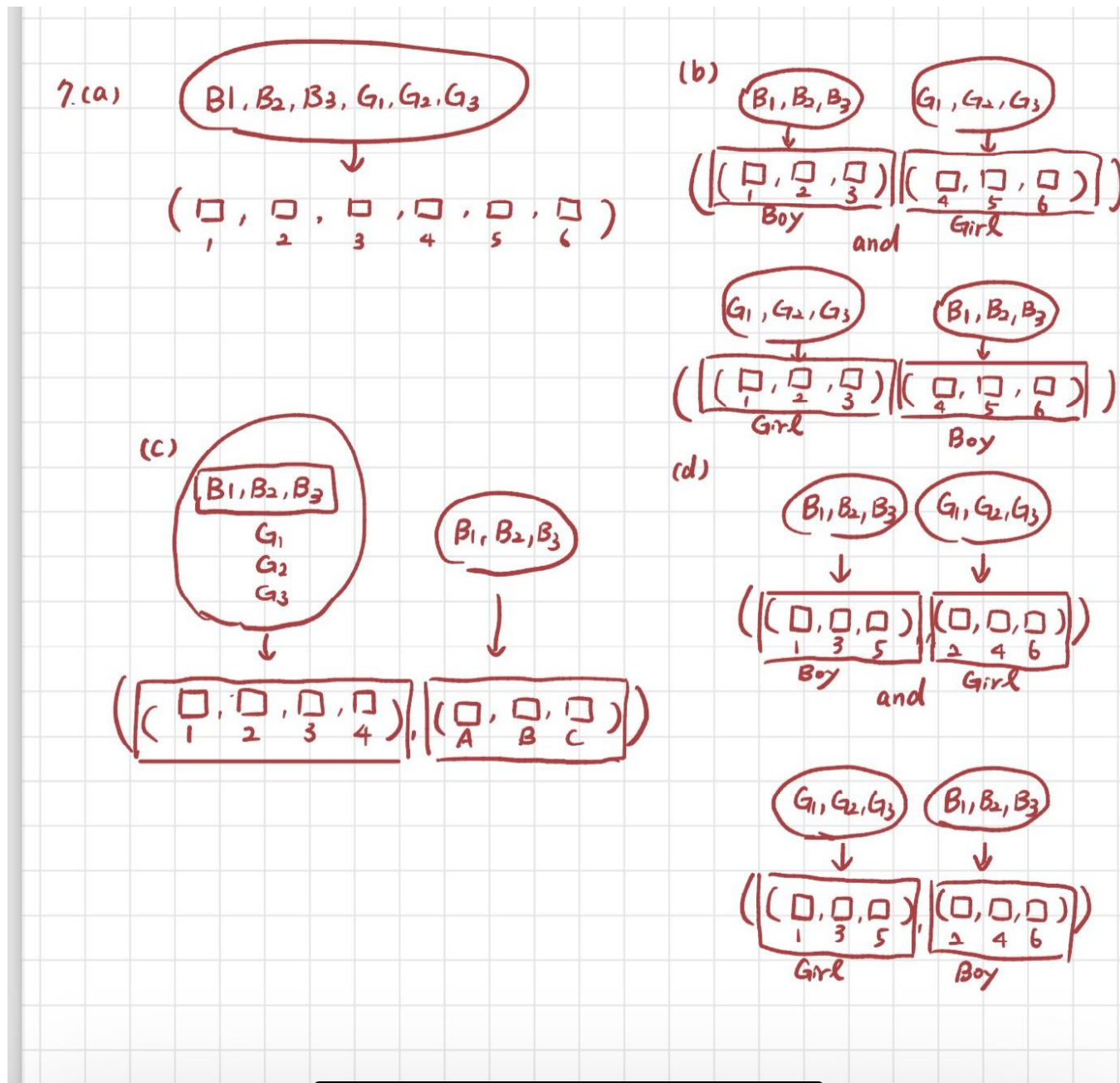
將座位編號為1~6

因為不同性別不能坐在一起，所以我們只有以下兩種狀況需要考慮：

(1) 男生坐在1、3、5；(2) 男生坐在2、4、6

無論哪個情況，坐法都可視為3相異物排列的方法數，即 $3!$ 種。故所求為：

$$\text{ans} = 2 \times 3! \times 3! = 72$$



14.**(a)**

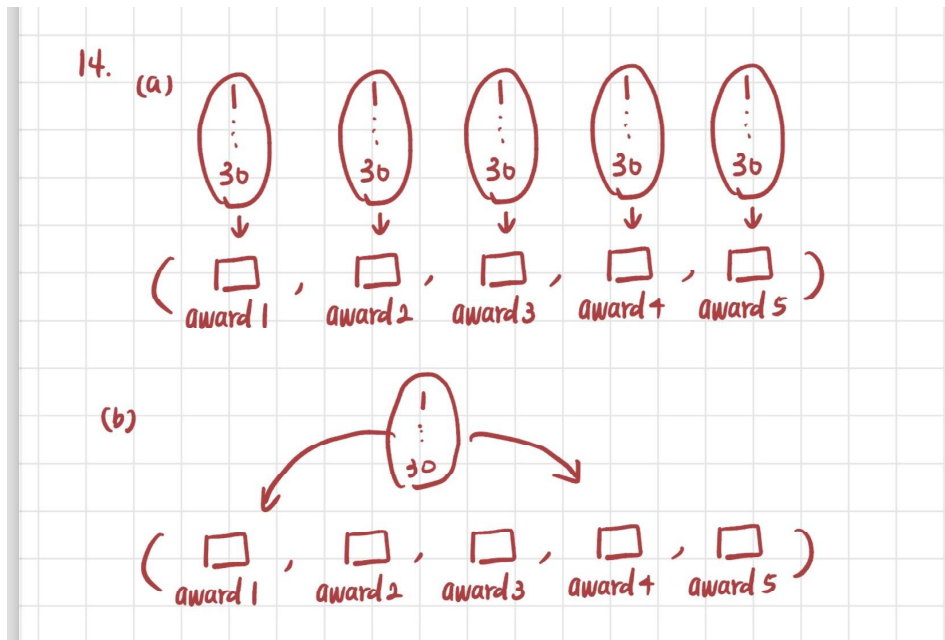
此狀況下，每種 award 都有可能頒給 30 位學生。故依乘法原則可知總方法數為：

$$ans = 30^5 = 24300000$$

(b)

因為每個學生只能至多獲得一個 award，共會有 5 為學生獲獎。所以所求為 (30 個相異物選出 5 個並排列的方法)：

$$ans = P_5^{30} = 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 = 17100720$$

**18.****(a)**

所有球員都是同性別

Case 1: 從 12 個男生選 5 個球員

$$= C_5^{12} = \frac{12!}{5! \times (12-5)!} = \frac{12!}{5! \times 7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$$

Case 2: 從 9 個女生選 5 個球員

$$= C_5^9 = \frac{9!}{5! \times (9-5)!} = \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

依加法原則知，所求為：

$$ans = 792 + 126 = 918$$

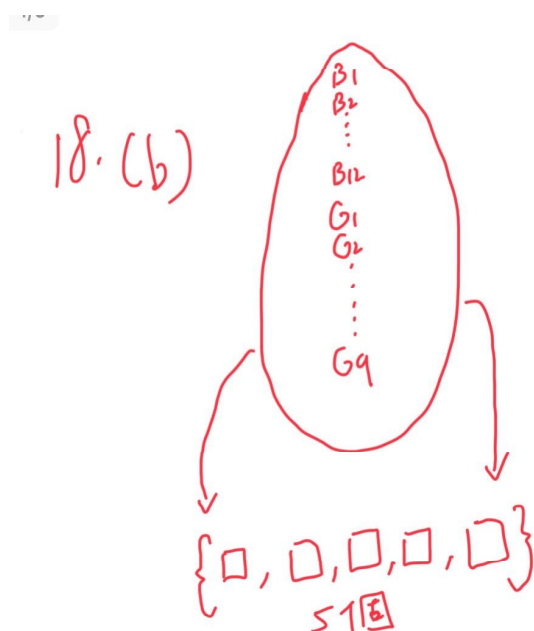
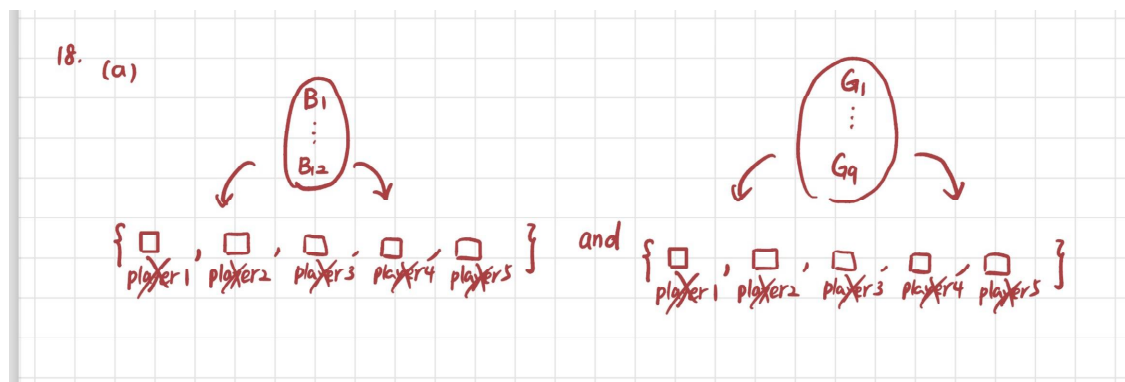
(b)

所有情況為從 21 個人選擇 5 個人當球員，將所有情況減去 (a) 小題的所有球員都是同性別，即是 (b) 小題的 5 個球員裡有男有女的狀況

$$= C_5^{21} = \frac{21!}{5! \times (21-5)!} = \frac{21!}{5! \times 16!} = \frac{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 20,349$$

總方法數 (無任何限制)-所有球員同性別的方法數即為所求：

$$ans = 20,349 - 918 = 19,431$$



20.

從 10 個數學家挑出 2 個的方法數 =

$$\binom{10}{2}$$

從 8 個統計學家挑出 3 個的方法數 =

$$\binom{8}{3}$$

從 7 個物理學家挑出 4 個的方法數 =

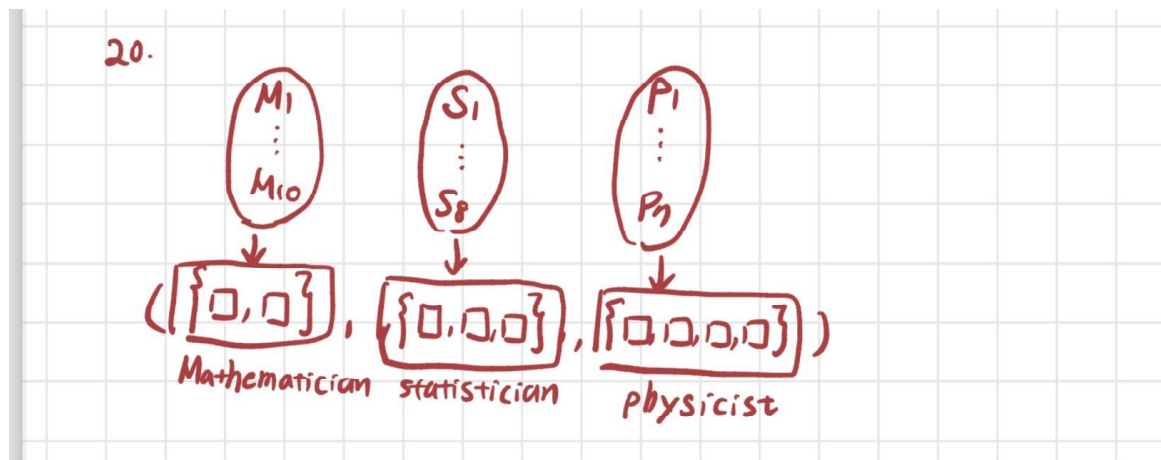
$$\binom{7}{4}$$

依乘法原則知所求為:

$$ans = \binom{10}{2} \times \binom{8}{3} \times \binom{7}{4}$$

$$= 45 \times 56 \times 35$$

$$= 88200$$

**31.****(a)**

每個禮物都有三個人可以選擇，所以總方法數為:

$$ans = 3 \times 3 \times 3 \dots \times 3 = 3^{10}$$

(b)

10 個禮物分給 3 個人，每個人至少拿 3 個禮物，所以唯一的可能性是其中 1 個人拿 4 個，另外 2 個人各拿 3 個，

10 個禮物先分成 3 堆，每一堆分別是 4 個，3 個，3 個

$$\binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{3}$$

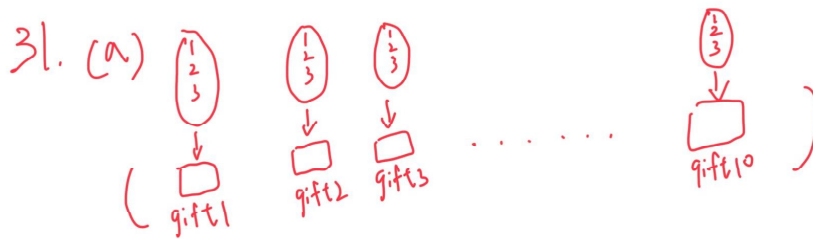
三堆禮物分給三個人的排列數為：

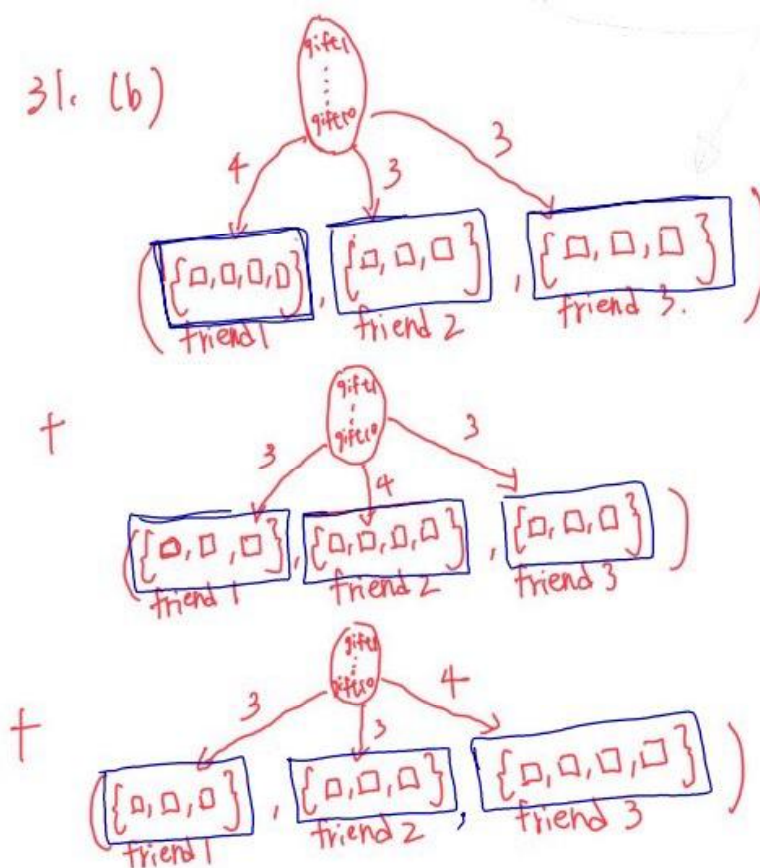
$$\binom{3}{1}$$

依乘法原則，總方法數為：

$$ans = \binom{3}{1} \times \binom{10}{4} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3}$$

$$= 3 \times 210 \times 20 = 12600$$





37.

- (a) 抓 10 隻魚中每種魚的數量,
- x_1 : 第 1 種魚的數量
- x_2 : 第 2 種魚的數量
- x_3 : 第 3 種魚的數量
- x_4 : 第 4 種魚的數量
- x_5 : 第 5 種魚的數量
- 求 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ 的整數解:

$$ans = \binom{5 + 10 - 1}{10} = \binom{14}{10} = 1001.$$

- (b). 已知 10 隻中有 3 隻是 trout, 剩下 7 隻分給 4 種魚,
- 求 $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$ 的整數解:

$$ans = \binom{4 + 7 - 1}{7} = \binom{10}{7} = 120.$$

- (c). 已知 10 隻中至少有 2 隻是 trout, 剩下 8 隻去分配給 5 種魚, $x_1' = x_1 + 2$,
- 求 $x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ 的整數解:

$$ans = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$$

TE8.

n 個男生和 m 個女生中取 r 個人方法數:=

$$\binom{n+m}{r}$$

\ n 個男生中取 X 個和 m 個女生中取 $r-X$ 個方法數:=

$$\binom{n}{X} \binom{m}{r-X}$$

從 $X=0$ 到 $X=r$ 做加總:

$$\sum_{X=0}^r \binom{n}{X} \binom{m}{r-X} = \binom{n+m}{r}$$

, 此方法數會等於 n 個男生和 m 個女生中取 r 個人方法數 (, 在此需令 $\binom{t}{s} = 0$ if $S > t$.
(比如 $n = 2, m = 5, r = 4$ 的狀況就會用到)

